## DETERMINANTER

**Mål:** Du skall kunna beräkna determinanten för en matris av godtycklig storlek och kunna förenkla kalkylerna med hjälp av satserna i kapitlet. Du måste lära dig att fyrradiga determinanter och större kan endast beräknas med hjälp av utveckling. Du skall kunna tillämpa Sats 4 för att avgöra om en matris är inverterbar. Sats 4 bör Du kunna bevisa.

---

Determinanten av en $2 \times 2$-matris $A$ definieras som

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

---

Determinanter av $n \times n$-matris definieras med hjälp av "utveckling efter rad 1":

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \ldots + (-1)^n a_{1n}\det(A_{1n}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j})$$

där $A_{ij}$ betecknar $(n-1) \times (n-1)$-matrisen som fås ur $A$ genom att strycka ut rad $i$ och rad $j$.

**Sats 1 (3.1)** Determinanter kan beräknas genom utveckling efter vilken rad eller kolonn som helst dvs

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$$

(utveckling efter rad $i$) eller

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$$

(utveckling efter kolonn $j$)

---

Om vi räknar ut vilka termer som ingår i determinanten så ser vi att varje term är en produkt av $n$ element, ett element ur varje rad, ett ur varje kolonn. Skriver vi de i ordning $a_{1,j_1}$, $a_{2,j_2}, \ldots a_{n,j_n}$ så får vi att

$$\det(A) = \sum \operatorname{sign}(j_1, \ldots, j_n)a_{1,j_1}a_{2,j_2}\ldots a_{n,j_n}$$

där vi summerar över alla permutationer $j_1, j_2, \ldots, j_n$ av $1, 2, \ldots, n$. $\operatorname{sign}(j_1, \ldots, j_n) = 1$ $(= -1)$ om det krävs ett jämn (udda) antal byte får att återfå $1, 2 \ldots n$ ur $j_1, \ldots, j_n$.

---

**Ex.1.**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Vi gör en utveckling efter kolonn 1.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Vi gör en utveckling efter rad 1.

---

Om man använder dessa resultat upprepade gånger får man
**Sats 2(3.1)** Om $A$ är en triangulär matris så blir $\det(A)$ produkten av diagonalelementen.

---

**Sats 3(3.2)** Om $B$ erhålls av $A$ genom en elementär radoperation så gäller
a. En multiple av en rad i $A$ adderas till en annan rad: $\det(B) = \det(A)$.
b. Två rader byter plats: $\det(B) = -\det(A)$.
c. En rad i $A$ multipliceras med $\lambda$: $\det(B) = \lambda \det(A)$.

De elementära radoperationerna svarar multiplikationen med elementära matriser. Determinenten av en elementär matris $E_1$ av typ 1 (denna svarar addition till en rad en annan rad multiplicerad med konstant) är 1; determinanten av en elementär matris av typ 2 (vilken svarar radbyte) är $-1$ och determinanten av en elementär matris av typ 3 som svarar radmultiplikation med $\lambda \neq 0$ är $\lambda$. Satsen kan alltså reformuleras som
**Sats 3'** Om $B = EA$ , där $E$ är en elementär matris så är $\det(B) = \det(E)\det(A)$.

---

En kvadratisk matris $A$ kan alltid reduceras till en trappstegsform $U$ med hjälp av radaddition och radbyte (ej sklaning). Om $r$ är antalet radbyten så enligt Sats 3 $\det(A) = (-1)^r \det(U)$. Eftersom $U$ är triangulär, blir $\det(U)$ produkten av diagonalelementen. Om $A$ är inverterbar blir alla element på diagonalen pivotelement och därmed skilda från noll. Annars är minst ett diagonalelement lika med noll och $\det(A) = (-1)^r \det(U) = 0$.
Detta visar följande
**Sats 4 (3.2)** En kvadratisk matris $A$ är inverterbar omm $\det(A) \neq 0$.

---

Sats 4 (3.2) och Sats 8 (2.3) ger att
$\det(A) = 0$ omm $A : s$ kolonner är linjärt beroende;
$\det(A) = 0$ omm $A : s$ rader är linjärt beroende.

---

**Sats 5 (3.2)** För en godtycklig kvadratisk matris $A$ gäller

$$\det(A) = \det(A^T).$$

Av detta följer att en determinant kan förenklas även med kolonnoperationer.

---

**Sats 6 (3.2)** Om $A$ och $B$ är $n \times n$-matriser så är

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

**Varning!** $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ i allmänhet.

**Bevis.** Om $A$ inte är inverterbar så blir inte produkten $AB$ heller, ty annars $(AB)C = I$ för någon matris $C$ och därmed $A(BC) = I$ vilket medför inverterbarhet av $A$. Detta visar att satsen är sann då $A$ inte är inverterbar: $\det(A) = 0$ och $\det(AB) = 0$ enligt Sats 4. Om $A$ är inverterbar är $A$ radekvivalent med identitetsmatrisen $I$ och det finns en följd av elementära matriser $E_1, \dots, E_p$ sådana att $A = E_p \dots E_1 I = E_p E_{p-1} \dots E_1$. Upprepad användning av Sats 3' ger nu

$$\begin{aligned} |AB| &= |E_p E_{p-1} \dots E_1 B| = |E_p||E_{p-1}| \dots |E_1||B| \\ &= \dots = |E_p E_{p-1} \dots E_1||B| = |A||B| \end{aligned}$$