CRAMERS REGEL, VOLYM OCH LINJÄRA AVBILDNINGAR

Mål: Du skall kunna bevisa och tillämpa Cramers regel för att lösa ekvationssystem, tolka determinanter som area och volym.

Cramers sats. En kvadratisk linjär ekvationssystem $Ax = b$ har unik lösning omm $\det(A) \neq 0$.

Låt A vara en $n \times n$-matris och låt $b \in \mathbb{R}^n$. Beteckna med $A_i(b)$ den matris som erhålls från A genom att kolonn i ersätts av b.

Cramers Regel. Antag att A är inverterbar $n \times n$-matris. Låt $b \in \mathbb{R}^n$. Då ges lösningen x till matrisekvationen $Ax = b$ av

$$x_i = \frac{\det(A_i(b))}{\det(A)}, i = 1, \ldots, n.$$

Bevis. Låt $I_i(x) = [e_1 \ldots e_{i-1}\; x\; e_{i+1} \ldots e_n]$ (dvs matrisen som erhåls från identitetsmatrisen I genom att kolonn i ersätts av x). Då är

$$\begin{aligned} A \cdot I_i(x) &= [Ae_1 \ldots Ae_{i-1}\; Ax\; Ae_{i+1} \ldots Ae_n] \\ &= [a_1 \ldots a_{i-1}\; b\; a_{i+1} \ldots a_n] = A_i(b), \end{aligned}$$

där a_i är $A : s$ kolonn i. Alltså $\det(A)\det(I_i(x)) = \det(A_i(b))$. Eftersom $\det(I_i(x)) = x_i$ (kontrollera!), får vi $x_i = \det(A_i(b))/\det(A)$.

Sats 8 (3.3). En formel för inversmatris. Låt A vara en inverterbar matris. Då är

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

Adjunkten $adj(A)$ till A är matrisen $C^T = (c_{ij})^T$ där $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$, A_{ij} är den matris som fås från A genom att strycka rad i och kolonn j.

Bevis. Den j:te kolonnen i A^{-1} är lösningen till ekvationen $Ax = e_j$. Cramers regel ger nu att

$$\text{elementet på position } (i, j) \text{ i } A^{-1} \text{ är } \frac{\det(A_i(e_j))}{\det(A)}.$$

Utveckling av $\det(A_i(e_j))$ efter kolonn i ger att

$$\det(A_i(e_j)) = (-1)^{i+j}\det(A_{ji}) = c_{ji}.$$

Notera ordningen ji som orsakas av att det enda elementen i kolonn i ur $A_i(e_j)$ är en etta i rad j.

Sats 9 (3.3) Determinanten som area och volym

Om A är en 2×2-matris är $|\det(A)|$ arean av parallellogramen som spänns upp av A:s kolonner.

Om A är en 3×3-matris är $|\det(A)|$ volymen av parallellepipeden som spänns upp av A:s kolonner.

Sats 10 (3.3). Determinanten som area- eller volymskala.

Låt $T\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av $T(x) = Ax$. Om S är ett område i $\mathbb{R}^2$ och $T(S)$ bilden av detta område , så

$$\{\text{area av } T(S)\} = |\det(A)| \cdot \{\text{area av } S\}.$$

Om $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av $T(x) = Ax$ och S är ett område i $\mathbb{R}^3$ så

$$\{\text{volym av } T(S)\} = |\det(A)| \cdot \{\text{volym av } S\}.$$

Bevis. Vi gör beviset för parallelogram och respektive parallellepiped S. Låt S vara en parallellogram i $\mathbb{R}^2$ som spänns upp av vektorer $\mathbf{b_1}$ och $\mathbf{b_2}$. Då

$$S = \{s_1\mathbf{b_1} + s_2\mathbf{b_2} : s_1, s_2 \in [0, 1]\}.$$

Bilden av S under avbildningen T består av punkterna

$$T(s_1\mathbf{b_1} + s_2\mathbf{b_2}) = s_1T(\mathbf{b_1}) + s_2T(\mathbf{b_2}) = s_1A\mathbf{b_1} + s_2A\mathbf{b_2},$$

dvs en parallellogram som spänns upp av vektorerna $A\mathbf{b_1}$ och $A\mathbf{b_2}$. Om $B = [\mathbf{b_1}\ \mathbf{b_2}]$ så är arean av denna parallellogram

$$\det([A\mathbf{b_1}\ A\mathbf{b_2}]) = \det(AB) = (\text{produktsatsen}) = \det(A)\det(B) = \det(A)\{\text{arean av } S\}.$$

En godtycklig parallellogram är $\mathbf{p}+S$ där S är en parallellogram med ett hörn i origo och p är en vektor. Eftersom T är en linjär avbildning blir bilden av parallellogramen $T(\mathbf{p}) + T(S)$. Klart att förflyttning inte ändrar arean och vi har

$$\{\text{arean av } T(\mathbf{p} + S)\} = \{\text{arean av } T(\mathbf{p}) + T(S)\} =$$
$$\{\text{arean av } T(S)\} = |\det A|\{\text{arean av } S\} = |\det A|\{\text{arean av } \mathbf{p} + S\}$$

Beviset för parallellepiped är liknande.