VEKTORRUM

Mål: Du skall kunna definiera begreppen *vektorrum* och *underrum av vektorrum* och kunna avgöra om en given delmängd av ett känt vektorrum är ett underrum eller ej.

Du skall kunna definiera begreppen *nollrum* och *kolonnrum* till en matris och kunna förklara sambanden mellan dessa begrepp och ekvationssystems lösningsmängder.

Du skall kunna bevisa att nollrum och kolonnrum är underrum i lämligt $\mathbb{R}^n$.

Def. Ett **vektorrum** (över $\mathbb{R}$) är en mängd V vars objekt kallas vektorer, med två operationer: dels addition av vektorerna, dels multiplikation av en vektor med en skalär. Dessa operationer måste uppfylla nedanstående räkneregler (axiom): för alla vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ och alla skalärer c och d gäller

a) summan av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ är ett objekt i V
b) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
c) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$
d) det finns en nollvektor $\mathbf{0}$ i V sådan att $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}=\mathbf{0}+\mathbf{u}$
e) till varje $\mathbf{u}$ i V finns en vektor $-\mathbf{u}$ i V så att $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=0$
f) produkten av $\mathbf{u}$ med skalären c, $c\mathbf{u}$, är en vektor i V
g) $c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$
h) $(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$
i) $c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u}$
j) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

Ex. 1. $\mathbb{R}^n$.
2. Geometriska vektorer.
3. P_n, mängden av alla polynom av grad $\leq n$, dvs $p(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n$. P_n är ett vektorrum m a p vanlig addition av två polynom och multiplikation med en skalär.
4. Mängden av alla reelvärda funktioner m a p samma operationer.

Def. En icke-tom delmängd U i ett vektorrum V kallas ett **underrum** i V om

- U är sluten under addition: $\mathbf{u}, \mathbf{v}\in U \Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v}\in U$
- U är sluten under multiplikation med skalär: $\mathbf{u}\in U\Rightarrow c\mathbf{u}\in U$ då $c\in\mathbb{R}$.

U är ett vektorrum själv.

Sats 1. Om $v_1,\ldots,v_p$ tillhör ett vektorrum V så är $\text{span}\{v_1,\ldots,v_p\}$ ett underrum i V.

Def. **Nollrummet** till en $m\times n$-matris A, $\text{Null}(A)$, är mängden av alla lösningar till den homogena ekvationen $Ax=0$:

$$\text{Null}(A)=\{x : x\in\mathbb{R}^n \text{ och } Ax=0\}.$$

Sats 2. Nollrummet till en $m\times n$-matris är ett underrum i $\mathbb{R}^n$

Bevis. Klart att $\text{Null}(A)$ är en delmängd av $\mathbb{R}^n$, ty A har n kolonner. $\text{Null}(A)$ är icke-tom, ty $\mathbf{0}$ ligger i $\text{Null}(A)$: $A\mathbf{0}=\mathbf{0}$. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara vektorer i $\text{Null}(A)$. Då $A\mathbf{u}=0$ och $A\mathbf{v}=0$. Vidare,

$$A(\mathbf{u}+\mathbf{v})=A\mathbf{u}+A\mathbf{v}=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

vilket visar att $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \text{Null}(A)$ och därmed blir $\text{Null}(A)$ sluten under addition. Slutligen, om c är en skalär så

$$A(c\mathbf{u}) = cA\mathbf{u} = c(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

och $c\mathbf{u} \in \text{Null}(A)$. Alltså är $\text{Null}(A)$ ett underrum i $\mathbb{R}^n$.

Def. Kolonnrummet till en $m \times n$ matris A, $\text{Col}(A)$ är mängden av alla linjärkombinationer av kolonnerna i A. Om $A = [\mathbf{a_1} \dots \mathbf{a_n}]$, så är

$$\text{Col}(A) = \text{Span}\{\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_n}\}$$

ekvivalent formulerat:

$$\text{Col}(A) = \{\mathbf{b} : \mathbf{b} = A\mathbf{x} \text{ för någon vektor } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Sats 3. Kolonnrummet till en $m \times n$ matris A är ett underrum i $\mathbb{R}^m$.
Bevis. Kolonnerna i A är vektorer i $\mathbb{R}^m$. Satsen följer nu från Sats 1.

Olikheter mellan Nul(A) och Col(A) för en $m \times n$-matris A.

$\text{Nul}(A)$	$\text{Col}(A)$
1. $\text{Nul}(A)$ är ett underrum i $\mathbb{R}^n$	1. $\text{Col}(A)$ är ett underrum i $\mathbb{R}^m$
2. $\text{Nul}(A)$ är implicit definierat av ekvationen $A\mathbf{x} = 0$	2. $\text{Col}(A)$ är explicit definierat av kolonnvektorerna i A
3. Det tar tid att bestämma vektorer i $Nul(A)$	3. Det är lätt att hitta vektorer i $\text{Col}(A)$
4. Det finns inget uppenbart samband mellan $\text{Nul}(A)$ och elementen i A	4. Det finns ett uppenbart samband mellan $\text{Col}(A)$ och elementen i A
5. En typisk vektor $\mathbf{v}$ i $\text{Nul}(A)$ är sådan att $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$	5. En typisk vektor i $\text{Col}(A)$ är sådan att $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ är konsistent
6. Givet en vektor $\mathbf{v}$, så är det enkelt att avgöra om $\mathbf{v} \in \text{Nul}(A)$	6. Givet en vektor $\mathbf{v}$, så tar det oftast tid att avgöra om $\mathbf{v} \in \text{Col}(A)$
7. $\text{Nul}(A) = \{\mathbf{0}\}$ omm ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast har trivial lösning	7. $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$ omm ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning för alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
8. $\text{Nul}(A) = \{\mathbf{0}\}$ omm den linjära avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ är injektiv	8. $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$ omm den linjära avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ är surjektiv