MATEMATIK | **Hjälpmedel: utdelad ordlista, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2005-03-19 kl. 08.30–12.30
Tentamen

Linjär Algebra M, TD, V, Z , Lösningar

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

(a) $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(A) = 2$ (2p)

(b) Bas för Nul(A) är $\mathcal{B} = \{ \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \}$.

(3p)

Lösningarna till ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, är

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2p)

(c) $B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. (2p)

(e) (M,V,Z) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. (2p)

(TD) $x_1 = -2$ (2p)

(f) Egenvektorer $\mathbf{v} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$. (2p)

2. (a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 11 & 24 \\ -4 & -9 \end{bmatrix}$ (4p)

Lösning: Egenvärden är lösningarna till karakteristiska ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$.
Egenvärden -1 och 3.
Egenvektorer är icketriviala lösningar till $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Egenvektorer till egenvärdet -1 är $\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.
Egenvektorer till egenvärdet 3 är $\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

(b) Antag att en partikel rör sig i ett kraftfält och att dess lägesvektor $\mathbf{x}$ satisfierar differentialekvationen $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ där A är som ovan och $\mathbf{x}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (3p)
Lös detta begynnelsevärdesproblem.

Lösning: Lösningarna till $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ är $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$.

Begynnelsevillkoret $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ger $c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vars lösning är $c_1 = 2,\ c_2 = -1$

Alltså $\mathbf{x}(t) = 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} - \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$

3. Anpassa med hjälp av minsta kvadratmetoden en rät linje $y = a + b \cdot t$ till följande data (6p)

t_i	-2	-1	0	1
y_i	-2	1	0	3

Beräkna också medelfelet.
OBS: Om $\hat{\mathbf{x}}$ är minsta kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ och n är antalet mätdata, så är medelfelet $\epsilon = ||A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}||/\sqrt{n}$

Lösning: De fyra mätningarna ger upphov till fyra ekvationer $y_i = a + b \cdot t_i$. På matrisform $A\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{y}$ där $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Ekvationssystemet saknar lösning varför vi bestämmer bästa linjen med minsta-kvadrat-metoden och bestämmer lösningen till $A^TA\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^T\mathbf{y}$ alltså till

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Detta har lösningen $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Den bästa linjen har alltså ekvationen $y = \dfrac{6}{5} + \dfrac{7}{5}t$.

Medelfelet är $\dfrac{1}{\sqrt{4}}\left\|A\begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix} - \mathbf{y}\right\| = \sqrt{0.8} = 2\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

4. Planet $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$. Bestäm en ON-bas för planet och sedan matrisen för projektionen av en vektor $\mathbf{x}$ på detta plan. (6p)

Lösning: Bestämmer först en ortogonal bas för planet, antingen genom Gram-Schmidts metod eller med hjälp av $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ som är normal till planet.

Med $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ och $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1$ får vi

$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$

En ortonormerad bas får vi genom normering.

$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ är alltså den sökta ON-basen.

Projektionsmatrisen kan vi nu bestämma på flera olika sätt.

Projektionen Av en vektor $\mathbf{x}$ på planet W är $\mathbf{x}_W = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_1)\,\mathbf{b}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_2)\,\mathbf{b}_2$.

I detta samband kan vi antingen låta $\mathbf{x}$ vara en godtycklig vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$, beräkna projektionen och identifiera matrisen. Eller beräknar vi projektionen av vektorerna i standardbasen och får kolonnerna i projektionsmatrisen. Eller kan vi skriva om sambandet till $\mathbf{x}_W = BB^T\mathbf{x}$ där B är 3×2-matrisen $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$.

Projektionsmatrisen är alltså

$$M = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Avbildningen $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_4$ definieras av (6p)

$$T(p(t)) = \int^t p(s)(s+1)ds.$$

Tolkning: För att förstå uppgiften är det lämpligt att konkretisera. Tag därför en vektor i $\mathbb{P}_2$, alltså ett polynom $p(t)$ av grad högst 2 och beräkna $T(p(t))$. Med $p(t) = 1+t^2$ har vi $T(p(t)) = \int_0^t (1+s^2)(s+1)ds = \int_0^t (1+s+s^2+s^3)ds = t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{4}t^4$ som alltså är en vektor i $\mathbb{P}_4$

(a) Visa att T är en linjär avbildning.

Lösning: Om $p(t)$ och $q(t)$ är två polynom så är $T(p(t)+q(t)) = \int_0^t (p(s)+q(s))(s+1)ds = \int_0^t (p(s)(s+1)+q(s)(s+1))ds = \int_0^t p(s)(s+1)ds + \int_0^t q(s)(s+1)ds = T(p(t)) + T(q(t))$

Om c är en skalär är $T(cp(t)) = \int_0^t cp(s)(s+1)ds = c\int_0^t p(s)(s+1)ds = cT(p(t))$.

Ovanstående likheter är direkt utnyttjande av räkneregler för integraler.

Vi har alltså att $T(p(t)+q(t)) = T(p(t))+T(q(t))$ och $T(cp(t)) = cT(p(t))$ för alla skalärer c och alla vektorer i $\mathbb{P}_2$. Således är T linjär.

(b) bestäm matrisen M för T relativt baserna $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ och $\mathcal{C} = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$.

Lösning: Avbildningsmatrisen M ges av

$$M = \begin{bmatrix} [\, T(\mathbf{b}_1)\,]_{\mathcal{C}} & [\, T(\mathbf{b}_2)\,]_{\mathcal{C}} & [\, T(\mathbf{b}_3)\,]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$

$T(\mathbf{b}_1) = \int_0^t 1(s+1)ds = \frac{1}{2}t^2+t$. $\quad [\, T(\mathbf{b}_1)\,]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

$T(\mathbf{b}_2) = \int_0^t s(s+1)ds = \frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2$. $\quad [\, T(\mathbf{b}_2)\,]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}^T$

$T(\mathbf{b}_3) = \int_0^t s^2(s+1)ds = \frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3$. $\quad [\, T(\mathbf{b}_3)\,]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^T$

Avbildningsmatrisen är således:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(c) Bestäm koordinaterna för $T(1-2t+3t^2)$ i basen $\mathcal{C}$ med hjälp av en matrismultiplikation med M ovan.

Lösning: $[\, T(1-2t+3t^2)\,]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Om en utökad matris reduceras till trappstegsform och sista raden i denna är $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ så är det associerade ekvationssystemet inte lösbart.

Svar: Falskt

(b) Om A är en 3×4 matris så kan avbildningen $\mathbf{x} \longrightarrow A\mathbf{x}$ inte vara en-entydig (injektiv).

Svar: Sant

(c) Om A ocb B båda är inverterbara $n \times n$ matriser så är $\mathbf{x} = A^{-1}B^{-1}$ en lösning till matrisekvationen $AX = XB$.

Svar: Falskt

(d) Det är möjligt att konstruera en 3×4 matris A sådan att $dim\,Col\,A = 2$ och $dim\,Nul\,A = 2$.

Svar: Sant

(e) Om kolonnerna i en $n \times n$ matris är linjärt oberoende så måste också raderna vara det.

Svar: Sant

(f) Om $A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ för alla $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ i $\mathbb{R}^n$, så måste kolonnerna i A vara ortonormerade.

Svar: Sant

7. Formulera och bevisa Pythagoras sats i $\mathbb{R}^n$. (6p)

Svar: Formulering: se sats 2 i kapitel 6.1.

Beviset är en del av resonemanget före satsen:

$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \ldots = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \Leftrightarrow \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$

Lycka till!
C-H F