

Lösning till tentamen Linjär Algebra E/M/TD/Z

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

- 1 Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.
Skriv svaren tydligt och i ordning på (om möjligt) ett blad.

(a) Vad är determinanten för matrisen $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$? (2p)

Svar: -12

(b) Matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ har egenvärdet 1. Ange en motsvarande egenvektor. (2p)

Svar: $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$

- (c) Avgör vilken/vilka av matriserna som är inverterbara:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3p)$$

Svar: B och C är inverterbara, inte A .

(d) A är matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 9 & -1 & 7 & 1 \\ -2 & -6 & 0 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$. (3p)

Matlab-komandot `>> B = rref(A)` ger resultatet

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ange rangen för A samt en bas för *nollrummet* till A .

Svar: $\text{Rank}(A) = 3$, bas för $\text{Nul}(A)$ är $\{ \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \}$

(e) Ange inversen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (2p)

Svar: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- (f) En linjär avbildning F från \mathbf{R}^3 till \mathbf{R}^2 avbildar $\begin{bmatrix} 1, 0, 0 \end{bmatrix}^T$ på $\begin{bmatrix} 2, 3 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 0, 1, 0 \end{bmatrix}^T$ på $\begin{bmatrix} 0, 1 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 0, 0, 1 \end{bmatrix}^T$ på $\begin{bmatrix} 2, -1 \end{bmatrix}^T$. Ange avbildningsmatrisen för F . (2p)

Svar: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Till resterande uppgifter skall du **lämna in fullständig lösning**, alltså väl motiverat!

- 2 (a) Lös, enligt metoden med utökad matris, ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$$

Lösning: Utökade matrisen $[A | \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array} \right] \sim$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9/2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/2 \end{array} \right]$$

(b) Bestäm x_1 med hjälp av Cramers regel. (3p)

Lösning: $x_1 = D_1/D$ där $D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 9$ och $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 2$

Svar: $x_1 = 9/2$

3 Låt matrisen $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till A . (3p)

Lösning: Egenvärden är lösningar till karakteristiska ekvationen: $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9 - \lambda & 2 \\ 2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda + 50. \text{ Egenvärden } 5 \text{ och } 10.$$

Egenvektorer är icke-triviala lösningar till $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

$$A\mathbf{x} = 5\mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_2 = -2x_1, \text{ Egenvektorer } t \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T, t \neq 0.$$

$$A\mathbf{x} = 10\mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2x_2, \text{ Egenvektorer } t \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T, t \neq 0.$$

Svar: Egenvärde 5, egenvektor $\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T$

Egenvärde 10, egenvektor $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$

(b) Bestäm en formel för A^k . (3p)

Lösning: $A^k = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}^k \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \left(5^k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 10^k \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{5} \left(5^k \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 10^k \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Svar: $A^k = \frac{1}{5} \left(5^k \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + 10^k \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right)$

4 Beräkna (med minsta kvadratmetoden) en approximativ lösning till ekvationssystemet (6p)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = -4 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

Beräkna också medelfelet.

OBS: Om $\hat{\mathbf{x}}$ är minsta kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ och n är antalet mätdata, så är medelfelet $\epsilon = \|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|/\sqrt{n}$

Lösning: Minsta-kvadratmetodens lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ är lösningen till $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{y}$.

Minsta-kvadratmetodens lösning till $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ är alltså lösningen till

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Förenkling ger $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix}$ vars lösning är

Denna lösning ger $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

Medelfelet $\epsilon = \|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|/\sqrt{n} = \frac{\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 4^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}}{\sqrt{3}} = 2/\sqrt{3}$

Svar: $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 2$ medelfel $\epsilon = 2/\sqrt{3}$.

5 Med \mathbb{P}_3 menas det linjära rummet vars element är reella polynom av grad högst 3. Avbildningen $T: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ definieras av $T(p(t)) = p''(t) + p(t)$ (6p)

(a) Bestäm avbildningsmatrisen med avseende på den naturliga basen $\mathcal{E} = \{1, t, t^2, t^3\}$.

Lösning: $M_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} [T(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{E}} & [T(\mathbf{e}_2)]_{\mathcal{E}} & [T(\mathbf{e}_3)]_{\mathcal{E}} & [T(\mathbf{e}_4)]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix}$.

$T(\mathbf{e}_1) = T(1) = 1 = \mathbf{e}_1$, $T(\mathbf{e}_2) = T(t) = t = \mathbf{e}_2$, $T(\mathbf{e}_3) = T(t^2) = 2 + t^2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$,

$T(\mathbf{e}_4) = T(t^3) = 6t + t^3 = 6\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_4$,

Svar: $M_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) Bestäm avbildningsmatrisen med avseende på basen $\mathcal{B} = \{1 + t, t + t^2, t^2 + t^3, t^3\}$.

Lösning: $T(\mathbf{b}_1) = T(1 + t) = 1 + t = \mathbf{b}_1$, $T(\mathbf{b}_2) = T(t + t^2) = 2 + t + t^2 = 2 + \mathbf{b}_2$,

$T(\mathbf{b}_3) = T(t^2 + t^3) = 2 + 6t + t^2 + t^3 = 2 + 6t + \mathbf{b}_3$, $T(\mathbf{b}_4) = T(t^3) = 6t + t^3 = 6t + \mathbf{b}_4$.

För att uttrycka $T(\mathbf{b}_i)$ i basen \mathcal{B} behöver man nu kunna uttrycka 1 och t i denna bas.

Man kan då använda basbytesmatrisen $\mathcal{E} \xleftarrow{P} \mathcal{B}$ vars kolonner är $[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{E}}$.

$$\mathcal{E} \xleftarrow{P} \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Då är } \mathcal{B} \xleftarrow{P} \mathcal{E} = \left(\mathcal{E} \xleftarrow{P} \mathcal{B}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Här kan man läsa av att $1 = \mathbf{e}_1 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4$ och $t = \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4$.

Då är $T(\mathbf{b}_2) = 2 + \mathbf{b}_2 = 2(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4) + \mathbf{b}_2 = 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3 - 2\mathbf{b}_4$,

$T(\mathbf{b}_3) = 2 + 6t + \mathbf{b}_3 = 2(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4) + 6(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4) + \mathbf{b}_3 = 2\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2 - 3\mathbf{b}_3 + 4\mathbf{b}_4$
och

$T(\mathbf{b}_4) = 6t + \mathbf{b}_4 = 6(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4) + \mathbf{b}_4 = 6\mathbf{b}_2 - 6\mathbf{b}_3 + 7\mathbf{b}_4$

Svar: $M_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

(c) Ange sambandet mellan de två avbildningsmatriserna med hjälp av transformationsmatrisen för basbytet ($\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$).

Med hjälp av basbytesmatriserna ovan har vi att

$$M_{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \xleftarrow{P} \mathcal{E} M_{\mathcal{E}} \mathcal{E} \xleftarrow{P} \mathcal{B}.$$

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} M_{\mathcal{E}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Beräkning av matrisprodukten ger $M_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6 Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

(a) Alla ekvationssystem med färre ekvationer än obekanta har parameterlösning.

Svar: Falsk

(b) Om A är en 5×3 - matris så är rangen för A högst 3.

Svar: Sann

(c) Om A är en kvadratisk matris med $\det A = 0$ så är $\lambda = 0$ ett egenvärde till A

Svar: Sann

(d) Om en matris A är diagonaliserbar så är A symmetrisk.

Svar: Falsk

(e) Om A är en $m \times n$ - matris och B en $m \times 1$ - matris så har ekvationssystemet $A^T A X = A^T B$ minst en lösning.

Svar: Sann

(f) Om A är en $m \times n$ - matris och B en $m \times 1$ - matris så har ekvationssystemet $A^T A X = A^T B$ högst en lösning.

Svar: Falsk

7 (a) Definiera vad som menas med att en mängd av vektorer i ett vektorrum är linjärt oberoende. (1p)

(b) Bevisa att varje mängd, bestående av n linjärt oberoende vektorer i \mathbb{R}^n , spänner upp \mathbb{R}^n . (4p)

(c) Definiera vad som menas med en bas för ett underrum av ett vektorrum. (1p)

/C-H F