TMV 841 Linjär algebra V, vt 07
Vecko–PM läsvecka 4

Lay: 4.1 - 4.6 Vektorrum.

I avsnitt **4.1** introducerad begreppen *vektorrum* och *underrum*. Detta kan synas abstrakt men idén är att ge en sammanhållande teori för fenomen som är olika men har samma grundläggande egenskaper. Du har redan mött två olika vektorrum, även om vi inte direkt poängterat att de är olika. Först studerade vi det åskådliga rummet med vektorer som representeras av riktade sträckor. En vektor är då en mängd av riktade sträckor, alla representanter för vektorn. I denna kurs har vi arbetat med $\mathbb{R}^n$ där en vektor är en n-tipel av reella tal. Vi kan åskådliggöra vektorer i $\mathbb{R}^3$ genom att markera punkter i ett rätvinkligt koordinatsystem.
På samma sätt kan vi, så snart vi har en bas för det åskådliga rummet bestående av tre vektorer som inte ligger i ett plan, ge koordinater för vektorerna. Vi får då objekt i $\mathbb{R}^3$. Om basen är en standardbas (ON, positivt orienterad) ser vi ingen skillnad på åskådliga rummet och $\mathbb{R}^3$. Är basen inte en standardbas så är det annorlunda.
Detta är naturligtvis inte det enda skälet till att studera vektorrum allmänt, det finns många. Ett annat är att först genom att gå till den allmänna teorin kan vi hantera begreppen *underrum* och *dimension* bra. Dessa är väsentliga då vi fortsätter vår analys av linjära ekvationssystem.

Viktigast i **4.1** är sats 1 med vars hjälp man oftast enkelt kan visa att en viss mängd är ett underrum i något större vektorrum. Bevisidén som ges i exempel 10 är värdefull kunskap.

I **4.2** införs begreppen *nollrum* till en matris A, som är samma som lösningsmängden till den homogena ekvationen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, och *kolonnrummet* till A, som är samma som mängden av alla $\boldsymbol{b}$ för vilka ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har lösning. Dessa underrum i $\mathbb{R}^n$ kallas också*kärna* och *värdemängd* för den linjära avbildning som ges av A. Vi får alltså nya sätt att tänka om, och analysera, linjära ekvationssystem. Beviset av sats 2 är centralt då det visar hur matrismultiplikationens linjära egenskaper spelar in. Exempel 8 och 9 ger intressanta kopplingar till föregående kurs, även för vissa differentialekvationer ges ju allmän lösning av en partikulärlösning och allmän homogenlösning.

Bas-begreppet, som införs i **4.3** är oerhört viktigt. Tänk på att en bas är *en mängd av vektorer*. Lite oegentligt talar vi om de enskilda medlemmarna i en bas som *basvektorer* vilket kan ge intrycket att de ensamma har någon speciell egenskap. Så är det inte, varje vektor utom nollvektorn kan ingå i en bas. Väsentligt att kunna är att bestämma baser för nollrum och kolonnrum för matriser. Sats 6 med bevis är viktig.

I många tillämpningar handlar det om att välja en bas som är lämplig för det aktuella problemet. Koordinatsystem, som införs i **4.4**, är avgörande i detta sammanhang. Det gäller också att hålla ordning på de olika system man arbetar med. För detta har man *basbytesmatrisen* $P_{\mathcal{B}}$ som kommer till stor användning längre fram i kursen. Ett djupare studium görs i 4.7

Begreppen *dimension* och *rang* (dimensionen av kolonnrummet) införs i **4.5** och **4.6**. Matrisrang är viktigt i vissa tillämpningar, t.ex. inom reglerteknik. I **4.5** ingår flera viktiga satser: satserna 9 och 10 som ger möjlighet att definiera begreppet dimension, Sats 11 som visar att om H är äkta underrum i V så har H lägre dimension än V och sats 12, *bassatsen*, som ofta leder till att det kontrollerande räknearbetet kan minskas.
Beviset av sats 9 är belysande då det visar hur uttalanden om allmänna vektorrum ofta hänger samman med uttalanden om linjära ekvationssystem.I **4.5** är sats 14, *rangsatsen* eller som den också kalla *dimensionssatsen* viktig. Självklart också fortsättningen av sats 2.3.8 om inverterbara matriser. Den borde för övrigt inkludera även sats 3.2.4 .

Mål: Du skall kunna definiera begreppen *vektorrum* och *underrum av vektorrum* och kunna avgöra om en given delmängd av ett känt vektorrum är ett underrum eller ej.
Du skall kunna definiera begreppen *nollrum* och *kolonnrum* till en matris och kunna förklara sambanden mellan dessa begrepp och ekvationssystems lösningsmängder.
Du skall kunna bevisa att nollrum och kolonnrum är underrum i lämligt $\mathbb{R}^n$.
Du skall kunna definiera begreppen *linjärt beroende mängd av vektorer, linjärt oberoende mängd av vektorer* och *bas för ett vektorrrum*. Du skall kunna bevisa att varje mängd bestående av fler vektorer, i ett vektorrum V, än vad som finns i en bas för V måste vara linjärt beroende. Du skall kunna bestäma baser för nollrum och kolonnrum för matriser.
Du skall kunna definiera begreppet *koordinater för en vektor relativt en bas* och kunna bestämma koordinaterna för en vektor relativt en given bas.
Du skall kunna formulera och bevisa *Rang-satsen*.
Du skall kunna tillämpa *Satsen om inverterbara matriser* vid problemlösning.

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt.)

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Teoretiska uppgifter
4.1	PP 1, 3, 4, 7	11, 13, 15, 19, 35, 36	20, 23, 33, 34
4.2	PP, 1, 3, 5, 7, 9, 15, 17	21, 31, 37	25, 27, 30, 33, 39
4.3	PP, 3, 4, 9, 10	15, 27, 37, 38	21, 23, 29, 30, 36
4.4	PP, 1, 3, 7, 10	11, 13, 27, 29, 33	15, 19, 23, 25
4.5	PP, 1, 6, 11, 14	21, 33	19, 27, 29, 31
4.6	PP, 1, 3, 5	35	7, 9, 13, 15, 17, 21, 25, 30

Lab 3:
Spegling i linjer och plan.

Inledning

I sista uppgiften kommer ni att behöva en "personlig vektor", låt därför $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ och $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vara de vektorer i R^3 vars komponenter är de tre sista siffrorna i era personnummer. Skriv in $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ överst på lab-redovisningen.
Redovisning: Tre olika deluppgifter, detaljer ges i varje uppgift. Resultaten skall visas upp för handledaren vecka 6.

Kommandon som kan vara till nytta i dessa uppgifter :

norm	beräknar längden av en vektor.
acos	arcus-cosinus.
dot	beräknar skalärprodukten av två vektorer (alternativt: x'*y om x och y är kolonnvektorer).
cross	beräknar vektorprodukten av två vektorer (aktuellt i nästa lab).

Vinkeln mellan två vektorer

Uppgift 1: Skriv en funktionsfil som beräknar vinkeln mellan två givna vektorer.
Matematisk formel :$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| \cos v$
Funktionsfil: *function v=vinkel*(x, y)
Input : x,y - två vektorer
Output : v - vinkeln mellan x och y. Programmet skall ge vinkeln mellan vektorerna (valfri vinkelenhet). Skriv gärna programmet så att det inte spelar någon roll om vektorerna matas in som kolonnvektorer eller som radvektorer. Testa funktionen på vektorerna $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$. Redovisa med programmet samt resultatet från testkörningen.

Spegling

Matematisk bakgrund :
Låt planet π vara givet som $Ax + By + Cz = 0$. En normalvektor till planet är (A, B, C). Dividerar vi denna med $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, så får vi en ny normalvektor $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ av längd 1. Tag en punkt med ortsvektorn $\boldsymbol{x}$, och låt $\boldsymbol{p}$ och $\boldsymbol{s}$ vara ortsvektorn för ortogonala projektionen respektive speglingen av $\boldsymbol{x}$ i planet π. Projektionsformeln ger nu

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}.$$

För spegelpunkten gäller

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$$

Uppgift 2: Skriv ett program i form av en funktionsfil som gör följande: Givet planet $Ax + By + Cz = 0$ och en punkt $\boldsymbol{x}$ i rummet, beräkna dels spegelbilden $\boldsymbol{s}$ av $\boldsymbol{x}$ i planet och dels avbildningsmatrisen M för speglingen. Kom ihåg att kolonnerna i M då skall vara

spegelbilderna av basvektorerna $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$. Funktionsfil:
function $[s, M]$=*spegel*(x, A, B, C)

För bästa anpassning till nästa uppgift, presentera alla förekommande vektorer som kolonnvektorer. Testa funktionerna på några lämpligt valda plan och punkter, för vilka man lätt kontrollerar att resultaten stämmer. Visa upp eller lämna in filen.

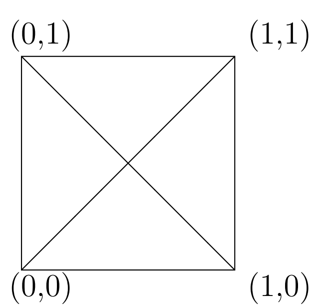
Ritning av godtyckliga figurer

Vi vill kunna rita godtyckliga plana figurer med MATLAB, exempelvis en kurva $(x(t), y(t))$ på parameterform eller en polygon. Detta kan göras genom att skapa en koordinatmatris för de punkter vi vill rita. Denna matris kan skrivas på något av följande sätt

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \dots & \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ är då radvektorer av längd n av x- resp y-koordinatern för punkterna, medan $\boldsymbol{p}_i$ är en kolonn vektor med kordinaterna för en punkt. Om vi vill rita en kurva på parameterform så väljer vi $\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} x(t_i) \\ y(t_i)) \end{bmatrix}$ för tilläckligt täta t-värden. En polygon får vi om vi låter $\boldsymbol{p}_i$ vara hörnen uppräknade i en lämplig ordning.

Vi ritar nu figuren genom att plotta x-koordinaterna mot y-koordinaterna med kommandot
■*plot(P(1,:),P(2,:)* .
Pröva genom att rita figuren nedan!



Uppgift 3: Rita en triangel, vars hörn är punkterna (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), där talen a_1, a_2, a_3 och b_1, b_2, b_3 kan få vara de 3 sista siffrorna i era personnummer (byt gärna ut någon koordinat, om triangeln blir alltför flack). Använd funktionen "spegel" i föregående avsnitt för att bestämma figurens spegelbild i linjen $x + 2y = 0$. Observera att spegling i plan ska bytas ut mot spegling i linje: välj $C = 0$ och mata in vektorn $\boldsymbol{x}$ med z-koordinaten noll. Plotta linjen, figuren och dess spegelbild i samma figur.