TMA 841 Linjär algebra V, vt 7
Vecko–PM läsvecka 5

Lay: 4.7 Basbyte i vektorrum, 5.1-5.4, 5.7 Egenvärden och egenvektorer

I avsnitt 4.4 infördes koordinatvektorn $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ för en vektor $\boldsymbol{x}$ relativt en bas $\mathcal{B}$. Målet i **4.7** är att beskriva sambandet mellan en vektors koordinatvektorer relativt två olika baser $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$. **Sats 15** säger allt. Beteckningarna är lite jobbiga men samtidigt logiska. Basbytesmatrisen P som konverterar $\mathcal{B}$-koordinater till $\mathcal{C}$-koordinater betecknas $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$, logiskt då att pilen går från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{C}$. Riktningen, från höger till vånster, motiveras om vi ser på upprepade koordinatbyten, först från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{C}$ sedan från $\mathcal{C}$ till $\mathcal{D}$. det sammansatta koordinatbytet från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{D}$ ges av matrisprodukten $Q \cdot P = \underset{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}{Q} \cdot \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$.
En svårighet är att varje matris kan ha flera tolkningar. I avsnitt **5.4** införs begreppet avbildningsmatris för godtycklig linjär avbildning $V \to W$. Avbildningsmatrisen A överför koordinaterna för en vektor $\boldsymbol{x}$ i en viss bas för V till koordinaterna för *en annan vektor* $T(\boldsymbol{x})$ i en bas för W, $A[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = [T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{C}}$. Basbytesmatrisen opererar på *olika koordinater för en och samma vektor*, $P[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}}$. Den vänsterriktade pilen i $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ kan tjäna till att få oss att tolka matrisen rätt.
Begreppen *egenvektor* och *egenvärde* som introduceras i **5.1** är centrala, såväl i matematik som i många tillämningar. I många problem, matematiska eller tillämpade, är det väsentligt att bestämma en bas för $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer till en matris A. Det första steget är då att lösa matrisens karakteristiska ekvation som nämns i **5.2**. Sedan kan man ofta stödja sig på Sats 6 för att bestämma den önskade basen. En viktig tillämpning av detta ges först i **5.3**, diagonalisering av matriser och senare då diagonaliseringen utnyttjas i olika tillämpningar. Vi kommer här att behandla avbildningsmatriser för linjära avbildningar **5.4**, system av linjära differentialekvationer i **5.7** och kvadratiska former i kapitel 7.

Mål: Du skall kunna: bestämma koordinater för en vektor relativt en bas $\mathcal{B}$ för ett vektorrum V; växla mellan olika baser för ett vektorrum V. Sats15 är central;
definiera begreppen egenvektor och egenvärde; definiera vad som menas med karakteristiska ekvationen till en matris och att kunna motivera den;
bestäma egenvärden och egenvektorer till en matris; diagonalisera en matris;
tillämpa diagonalisering i samband med linjära avbildningar; tillämpa matrisdiagonalisering för att lösa system av linjära differentialekvationer.

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt.)

Avsnitt	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Teoretiska uppgifter
4.7	PP, 1, 3, 5, 7, 10	13, 17, 19	11, 15
5.1	PP, 1, 3, 5, 6, 7, 9	13, 15, 17, 19, 39	21, 25, 27, 29
5.2	PP, 1, 5, 9, 13	17, 18, 27, 30	20, 21, 24
5.3	PP, 1, 3, 5, 7	11, 15, 17, 33	21, 23, 27
5.4	PP, 1, 3, 5	6, 9, 11, 15, 31, 32	21
5.7	1, 3, 5, 6	7, 15, 19	

OBS! Bortse från frågor som berör sänka, källa eller sadelpunkt i 5.7.

Laborationsuppgift 4.

Här följer en tabell över medeltemperaturen under 1931-1960 för årets tolv månader i Göteborg respektive Karesuando.

Månad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Göteborg	-1.8	-2.0	0.7	5.4	10.8	14.8	17.0	16.3	12.5	8.0	3.9	1.1
Karesuando	-14.0	-13.9	-9.9	-3.6	3.0	9.8	13.7	11.2	5.4	-1.6	-7.3	-11.2

Eftersom detta är ett periodiskt förlopp skall vi anpassa följande modell till mätdata,

$$y(t) = c_0 + c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)$$

Välj ett lämpligt värde på ω (så att funktionen gör en hel svängning på 12 månader.) och bestäm c_0, c_1 och c_2 med minstakvadratmetoden. Rita grafen av funktionen $y(t)$ och rita ut mätdata i samma bild så att man kan se om modellen ansluter väl till mätdata.

Hur mycket senare (ungefär) kommer våren i norr och hur mycket tidigare kommer hösten?