Tentamen TMA045 Tillämpad optimering 000524

1 a) Betrakta problemet

$$\min z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{då} \quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Skriv på standardform med hjälp av slackvariabler s_1 och s_2

$$\min z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{då} \quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - s_1 &= 3 \\ x_2 + s_2 &= 1 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Inför en artificiell variabler i bivillkor 1 för att lösa fas-I problemet och hitta en tillåten bas till fas-II.

$$\min w = a_1$$

$$\text{då} \quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - s_1 + a_1 &= 3 \\ x_2 + s_2 \qquad &= 1 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 a_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ställ upp simplextablån med basen s_1, a_1

	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1		
	0	0	0	0	1	0	$\leftarrow \boxed{-1}$
a_1	3	2	-1	0	1	3	samt genomför
s_2	0	1	0	1	0	1	"price out"

	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	$-w$		
	-3	-2	1	0	0	-3	$\leftarrow \boxed{3}$	Vi väljer x_1 som inkommande
a_1	3	2	-1	0	1	3	$\leftarrow \boxed{13}$	pga mest negativ reducerad kostnad.
s_2	0	1	0	1	0	1		MR-test ger a_1 utgående

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & -w \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
x_1 & 1 & 2/3 & -1/3 & 0 & 1 \\
s_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

Stryk a_1 och sätt in Z som målfunktion.

$$
\begin{array}{c|cccc|cl}
 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & -z & \\
 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \leftarrow \boxed{-2} \\
\hline
x_1 & 1 & 2/3 & -1/3 & 0 & 1 & \\
s_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

Genomför “Price out” vilket är ekvivalent med att ersätta kostnadsraden med $c - c_B^T B^{-1} A$

$$
\begin{array}{c|cccc|cl}
 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & -z & \\
 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & -2 & \leftarrow \boxed{1/3} \\
\hline
x_1 & 1 & 2/3 & -1/3 & 0 & 1 & \leftarrow \boxed{-2/3} \\
s_1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

Välj x_2 som inkommande (p.g.a mest negativ reducerad kostnad). Utgående blir s_1

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & -z \\
 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & -5/3 \\
\hline
x_1 & 1 & 0 & -1/3 & -2/3 & 1/3 \\
x_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

Optimal ty inga negativa reducerande kostnader. Optimal punkt $x_1 = 1/3, x_2 = 1, z = 5/3$

Kontroll! Sätt in i ursprungsproblem.

$$z = 2x_1 + x_2 = 2 \cdot 1/3 + 1 = 5/3 \quad \text{OK}$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Bivilk. 1} & 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 1/3 + 2 \cdot \geq 3 \quad \text{OK} \\
\text{Bivilk. 2} & \qquad\quad x_2 = \quad 1 \geq 1 \quad \text{OK}
\end{array}
$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{OK}$$

b) Titta på dualvariablerna till problemet

$$
\begin{array}{rl}
 & \min 2x_1 + x_2 \\
\text{då} & 3x_1 + 2x_2 - s_1 = 3 \\
 & \quad\; x_2 \qquad + s_2 = 1 \\
 & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
$$

Den optimala basen var $x_1, x_2 \Rightarrow$ basmatris $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{matrix} 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 \end{matrix} \qquad y = c_B^T B^{-1} = [2 \quad 1] \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2/3 - 1/3$$

Detta ger att då vi ändrar högerledet med $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ändras mållfunktionens värde med y $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$, under förutsättning att vi ej byter bas.

Högerledet med bas

$$x_1, x_2 = B^{-1} b(\alpha) = B^{-1} \Big(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Big) = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi ser att $B^{-1} b(\alpha) \geq 0$. För $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{3}$ för $\alpha < -\frac{1}{2}$ blir problemet olösligt då vi får kraven

$$x_2 \leq 1 + 2\alpha, \quad x_2 \geq 0$$

för $\alpha > \frac{1}{3}$ får vi en ny bas.

Sätt $\alpha = 1$ och lös grafiskt

$$\min z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{då } 3x_1 + 2x_2 \geq 3 + 1(-1) = 2$$

$$x_2 \qquad \leq 1 + 1 \cdot (2) = 3$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

Ur grafen ser man att nybas blir x_2, s_2 då dessa är nollskillda. Vi gör samma beräkning som tidigare

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$y = c_B^T B^{-1} = [1 \quad 0] \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = [1/2 \quad 0]$$

Kostnadsförändringen då vi ändrar α blir därmed $[1/2 \quad 0]\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1/2\alpha$

Vi har $\bar{b} = B^{-1}b(\alpha) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} +$ $\alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

$B^{-1}b(\alpha) \geq 0$ för $\alpha \geq \frac{1}{3}$ och basen x_2, s_2 är därmed optimal för $\alpha \geq \frac{1}{3}$

$$z(\alpha) \text{ för } \alpha \geq \frac{1}{3} \text{ är } c_B^T B^{-1} b(\alpha) - [1 \quad 0] \left(\begin{matrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix} + \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \right) = \frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

Därmed har vi

$$z(\alpha) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha, & \alpha < -\frac{1}{2} \\ 5/3, & -\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2}, & \frac{1}{3} < \alpha \end{array} \right\}$$

2 a) Den totala kostnaden per behandlad maskindel minimeras genom att lösa

$$\text{minimera } K(N,f) := 520\Big[\frac{42}{60Nf} + 0.1\frac{N^{5.667}f^3}{5^{6.667}}\Big] + 870\frac{42N^{5.667}f^3}{5^{6.667}}$$

då $200 \le N \le 600$

$0.001 \le f \le 0.005$

b)

$$\partial K/\partial N = 520\Big(- \frac{42}{60N^f} + 0.5667\frac{N^{4.667}f^3}{5^{6.667}}\Big) + 870 \cdot 5.667 \cdot \frac{42N^{4.667}f^3}{5^{6.667}}$$

$$\partial K/\partial f = 520\Big(- \frac{42}{60Nf^2} + 0.3\frac{N^{5.667}f^2}{5^{6.667}}\Big) + 870 \cdot 3 \cdot \frac{42N^{5.667}f^2}{5^{6.667}}$$

Låt $(N,f) = (200, 0.001); \nabla K(N,f) \circeq \begin{bmatrix} 239.5642 \\ 2.45\dot{1}0^7 \end{bmatrix}$.

Sätter man upp KKT för problemet och observerar att de enda aktiva bivillkoren är de undre gränserna finner man att Lagrange multiplikatorerna är lika med $\nabla K(N,f)$, som är en positiv vektor. Alltså uppfylls KKt-villkoren.

3 a) $f(x) := -5x_1+x_1^2-8x_2+2x_2^2; \nabla f(x) = \left(\begin{matrix} -5+2x_1 \\ -8+4x_2 \end{matrix}\right]; \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\nabla^2 f(x)$ är positivt definit för alla x (speciellt alla tillåtna x) så f är en (strikt) konvexfunktion. För konvexa och kontinuerligt differentierbara funktioner på en konvex mängd X gäller att (x^* är optimal):

$$f(x) \geq f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) \geq f(x) + \min_{y \in X}\{\nabla f(x)^T(y-x)\}.$$

d.v.s. det optimala målfunktionsvärdet tillhör intervallet $[f(x)+\min_{y\in X}\{\nabla f(x)^T(y-x)\}, f(x)]$ för varje $x \in X$.

Iteration 1: $x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; f(x^0) = 0; \nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \end{bmatrix}$.

Lös $\min_{y\in X} \varphi^0(y) := f(x^0) + \nabla f(x^0)^T(y - x^0) = -5y_1 - 8y_2 = -24$ för $y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. $f^* \in [-24, 0]$. $p^0 = y^0 - x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. $x_\ell = x^0 + \ell p^0 = \ell \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\ell \in [0,1]$ tillåtna steg.

$f(x_\ell) = -24\ell + 28\ell^2 ='' \psi^0(\ell)$

$\psi'^0(\ell) = 36\ell - 24 = 0 \Rightarrow \ell = 2/3 \leq 1$. Med $\ell = 2/3$:

Iteration 2: $x^1 = x^0 + 2/3p^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; f(x^1) = \psi(2/3) = -8; \nabla(x^1) = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Lös $\min_{y\in X} \varphi^1(y) := f(x^1)+\nabla f(x^1)^T(y-x^1) = -8-5y_1 = -18$ för $y^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. $f^* = [-18, -8]$. $p^1 = y^1 - x^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

$x_\ell = x^1 + \ell p^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \ell(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ell \\ 2-2\ell \end{bmatrix}, \ell \in [0,1]$.

$f(x_\ell) = -10\ell + 4\ell^2 - 16 + 16\ell + 8 - 16\ell + 8\ell^2$

$= -8 - 10\ell + 12\ell^2 =: \psi^1(\ell)$

$\psi'^1(\ell) = -10 + 24\ell = 0 \to \ell = \frac{5}{12} \leq 1$. Med $\ell = \frac{5}{12}$: $x^2 = x^1 + \frac{5}{12}p^1 = \begin{bmatrix} 5/6 \\ 7/6 \end{bmatrix}; f(x^2) = -\frac{121}{12}$.

$\because f^* \in [-18, -\frac{121}{12}]$

3 b) Om polyedern X inte är begränsad är det inte garanterat att $\min_{y \in x}\{\nabla f(x)^T(y-x)\}$ har en ändlig optimallösning för alla $x \in X$. Om simplexmetoden användes kommer i så fall en extremriktning p i x_0 med egenskapen av $\nabla f(x)^T p < 0$, att identifieras. Givet ett aktuellt iterat x^k, om vi identifierar en sådan extremriktning, p^k, förändras algoritmen som följer:

1. p^k är en descentriktning, ty $\nabla f(x^k)^T p^k < 0$. Utför en linjesökning i riktningen p^k, där steglängden här får vara obegränsat stor.
2. Den undre gränsen kommer att bli $-\infty$ i denna iteration. Den enda effekten av det är att den bästa känka undre gränsen inte kommer att uppdateras.

Då x är begränsad är det garanterat att problemet har en optimal lösning (Weierstrass sats). Om X är obegränsad måste målfunktionen ha någon ytterligare egenskap, bland annat måste den vara nedåt begränsad på X. För att säkerhetställa att linjesökningarna kommer att ge en lösning måste vi till och med kräva att f antar ett minsta värde längs varje möjlig riktning, och det garanteras t.exȯm f har egenskapen att $f(x) \to \infty$ då $\|x\| \to \infty$.

(Ett exempel ges av uppgiften, om bivillkoret $3x_1 + 2x_2 \leq 6$ stryks.)

5 a) Falskt ty det finns LP-problem som saknar tillåtna lösningar och det finns LP-problem som saknar ändliga optimala lösningar.

b) Falskt via motexempel: ingen avrundning (uppåt elleer nedåt) är ens tillåten; inte ens den närmaste tillåtna punkten är optimal!

c) Falskt om inte f är konvex:

Här är x^* ett globalt min, där $g(x^*) = x^* < b$. Men om bivilkoret tas bort är $\hat{x}$ ett globalt min och $f(\hat{x}) < f(x^*)$, så bivillkoret är inte redundant.

6.

$$f(x) = 0.1x_1x_2 + 0.01(x_1 - 2)^4 + 0.009(x_2 - 5)^4;$$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 0.04(x_1 - 2)^3 + 0.1x_2 \\ 0.037(x_2 - 5)^3 + 0.1x_1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 0.12(x_2 - 2)^2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.111(x_2 - 5)^2 \end{bmatrix}$$

a) $x^0 = (3, 7)^T; \nabla f(x^0) = (0.74, 0.596)^T; p^0 = (-0.74, -0.596)^T$
$x_\ell = x^0 + \ell p^0$

ℓ	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	...
$f(x_\ell)$	2.25	1.81	1.38	0.95	0.56	0.27	0.196	0.46	1.26	2.78	5.29	...

Sätt $\ell = 0.5$, detta ger $x^1 = (-0.1072, 7.0286)^T$, $f(x^0) = 0.196$
Optimum: $x^* \approx (-0.48, 6.1)^T; f(x^*) \approx 0.1$

7. Antag att $x^*_{j^*} = 0$ för varje optimal lösning till (P). Låt z^* vara det optimala värdet för (P) [och (D)]. Motsvarande duala optimala slack $t^*_j = 0$ om och endast om

$$\begin{array}{lll} & \max e_j^T t & \\ \text{då} & -b^T y \quad \leq -z^* & (e_j = j : \text{te enhetsvektorn}) \\ & \quad y \geq 0, t \geq 0 & \end{array}$$

har optimalt målfunktionsvärde 0. Men via stark dualitet gäller då att

$$\begin{array}{rl} & \min c^T x - \lambda z^* \\ & Ax - \lambda b \geq 0 \\ \text{då} & x \geq e_j \\ & \lambda \geq 0 \end{array}$$

har en optimal lösning med $c^T x - \lambda z^* = 0$. Om $\lambda = 0$ gäller att $c^T x = 0, Ax \geq 0, x \geq e_j$ har en lösning. Alltså finns en optimal lösning med $x_j^* \geq 1$. Om $\lambda > 0$ gäller att $c^T x = z^*, Ax \geq b, x \geq \lambda e_j$ har en lösning, d.v.s. återigen har vi en optimal lösning med $x_j^* > 0$.

Vi låter ur $(x^*(j), s^*(j))$ och $(y^*(j), t^*(j))$ vara optimala lösningar motsvarande paret (x_j^*, t_j^*) som är strikt komplementärt, och på samma sätt $(x^*(n+i), s^*(n+i))$ och $(y^*(n+i), t^*(n+i))$ för ett par $(y**_i, s_i^*)$ [via symmetri]. Med vikterna $\frac{1}{m+n}$ bildar sedan konvexkonbinationen av dessa, vilket är den sökta lösningen.