Lösningar till tintamen i TMA945/MAN280 000823

1 a) tillägg av slackvariabler och en artificiell variabel (bivillkor 1) ger Fas-1-problemet.

$$
\begin{aligned}
&\text{minimera } w = a \\
&\text{då} \quad 2x_1 + x_2 - s_1 \qquad + a = 2 \\
&\qquad -x_1 + x_2 \qquad + s_2 \qquad = 1 \\
&\qquad\quad x_1, \quad x_2, \quad s_1, s_2, \quad a \geq 0
\end{aligned}
$$

Simplextablå:

bas	$-w$	x_1	x_2	s_1	s_2	a	$\bar{b}$	
$-w$	1	-2	-1	1	0	0	-2	inkommande: x_1
a	0	$\boxed{2}$	1	-1	0	1	2	utgående: a
s_2	0	-1	1	0	1	0	1	
$-w$	1	0	0	0	0	1	0	red.kostn. $\geq 0 \to$ opt.
x_1	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	$1/2$	1	$w^* = 0 \to$ tillåten lösning
s_2	0	0	$3/2$	$-1/2$	1	$1/2$	2	funnen.

$z = 3x_1 + x_2 = 3(1 - 1/2x_2 + 4_2 s_1) + x_2 = 3 - 1/2x_2 + 3/2s_1$

bas	$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	$\bar{b}$	
-2	1	0	$-1/2$	$3/2$	0	-3	inkommande: x_2
x_1	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	1	utgående: s_2
s_2	0	0	$\boxed{3/2}$	$-1/2$	1	2	
$-z$	1	0	0	$4/3$	$1/3$	$-7/3$	Red.kostn. $\geq 0 \Rightarrow$ opt.
x_1	0	1	0	$-1/3$	$-1/3$	$1/3$	$x^* = (1/3, 4/3); z^* = 7/3$
x_2	0	0	1	$-1/3$	$2/3$	$4/3$	

Motivering: Vi kan tolka minimeringen av $c^T x$ som valet av det lägsta värdet av $z = c^T x = c_B^T x_B = c_B^T B^{-1} b$ över alla tillåtna baslösningar B. Från den starka dualsatsen vet vi att $y^* = (c_B^T B^{-1})^T$ är <u>en</u> dual optimal lösning för ett optimalt val av B. Så om y^* är unik kan vi skriva $z^* = \min c^T x = b^T y^*$, vilket anger värdet av z^* som funktion av b. Skuggpriset för bivillkor

i är y_i^*, vilket också fås ur $z^*(b) = b^T y^*$ som en partiell derivata, $\partial z^*(b)/\partial b_i$, då den existerar. Den reducerade kostnaden för en slackvariabel s_i, i ett $\geq$-villkor är $\bar{c}_{s_i} = 0 - (c_B^T B^{-1})(-e_j) = y_i^*$, där e_j är den i:te enhetsvektorn, dvs $\bar{c}_{s_i}$ är precis skuggpriset för bivillkor i.

2 a) Variabler:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{om tomt } i \text{ används} \\ 0, & \text{annars.} \qquad\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, 5 \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{om vårdcentral på tomt i servar område } j \\ 0, & \text{annars} \qquad i = 1, 2, \ldots, 5; j = 1, 2, \ldots, 18 \end{cases}$$

Modell:

$$\text{Minimera} \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{18} a_j d_{ij} y_{\ddot{y}}$$

$$\begin{aligned}
\text{då} \quad & \sum_{i=1}^{t} c_i x_i \leq b && \text{(budget)} \\
& \sum_{j=1}^{18} a_j y_{ij} \leq k_i x_i, i = 1, 2, \ldots, t && \text{(kapacitet)} \\
& \sum_{i=1}^{5} x_i = 2 && \text{(byggplan)} \\
& \sum_{i=1}^{5} y_{ij} = 1, j = 1, 2, \ldots, 18 && \text{tillordning)} \\
& x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \ldots, 5 \\
& y_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \ldots, 5; j = 1, 2, \ldots, 18
\end{aligned}$$

Problem av typen kapaciterad lokalisering.
"$y_{ij} \in \{0, 1\}$" kan bytas mot "$y_{ij} \geq 0$" pga heltalsegenskap (unimodularitet) i y_{ij} och tillordningsvillkoren.

b) Byt målfunktionen mot

$$\text{minimera } \max_{i,j}\{d_{ij} y_{ij}\}.$$

3 a) x^{t+1} karakteriseras av att vara det unika minimat till $p(x) = \frac{1}{2}\|y - [x^t - \gamma_t \nabla f(x^t)]\|^2$ över $y \in X$. Startionaritet:
$\nabla p(x^{t+1})^T (y - x^{t+1}) \geq 0, \forall y \in X$, dvs

$$(x^{t+2} - x^t + \gamma_t \nabla f(x^t))^T (y - x^{t+1}) \geq, \quad \forall y \in X. \qquad (*)$$

x^{t+1} är unik, typ $p(x)$ är strikt konvex och har begränsade nivåmängder. Antag att $x^{t+1} = x^t$. Då gäller från $(*)$ att $\nabla f(x^t)^T (y - x^t) \geq 0, \forall y \in X$, dvs x^t är stationär. Detta är en motsägelse! Alltså gäller att $x^{t+1} \neq x^t$.

b) Med $y = x^t$ i $(*)$ fås att $\nabla f(x^t)^T (x^{t+1} - x^t) \leq -(1/\gamma_t)\|x^{t+1} - x^t\|^2$, dvs descent fås i riktning $x^{t+1} - x^t$. När det gäller att descent fås med steg 1, dvs att $f(x^{t+1}) < f(x^t)^2$. Från Lipschitzkontinuiteten hos ∇f fås från tesen att

$$\begin{aligned} f(x^{t+1} - f(x^t) &\leq \nabla f(x^t)^T (x^{t+1} - x^t) + \frac{M}{2}\|x^{t+1} - x^t\|^2 \\ &\leq \Big(\frac{M}{2} - \frac{1}{\gamma_t}\Big)\|x^{t+1} - x^t\|^2 \end{aligned}$$

dvs $f(x^{t+1}) < f(x^t)$ om $\gamma_t < 2/M$.

c)

$$\begin{aligned} \|x^{t+1} - x^*\|^2 &= \|\mathrm{Proj}_x[x^t - \gamma_t \nabla f(x^t)] - \mathrm{Proj}_x(x^*)\|^2 \\ &\leq \|x^t - \gamma_t \nabla f(x^t) - x^*\|^2 \quad \text{(enligt ledning)} \\ &= \|x^t - x^*\|^2 - 2\gamma_t \nabla f(x^t)^T (x^t - x^*) + \gamma_t^2 \|\nabla f(x^t)\|62 \\ &\leq /f \text{ konvex } \Rightarrow f(x^*) \geq f(x^t) + \nabla f(x^t)^T (x^* - x^t)/ \\ &\leq \|x^t - x^*\|^2 - 2\gamma_t (f(x^*) - f(x^t)) + \gamma_t^2 \|\nabla f(x^t)\|^2 \\ &< \|x^t - x^*\|^2 \end{aligned}$$

om $0 < \gamma_t < \frac{2(f(x^t) - f(x^*))}{\|\nabla f(x^t)\|^2}$.

4. Se kursboken!

5. Problem: $\min f(x)$ då $g(x) \geq 0, x \in X$, med
$f(x) = -2x_1 + x_1^2 - x_2 + 2x_2^2, g(x) = -3x_1^2 - 2x_2^2 + 3$
$X = [0, 2] \times [0, 2]$.

givet ett iterat (x^t, λ^t) är subproblemet i SQP:

$$\min \nabla_x L(x^t, \lambda^t)^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla_x^2 L(x^t, \lambda^t) \quad (L(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T g(x))$$

$$\begin{aligned} \text{då} \quad & g(x^t) + \nabla g(x^t) p \geq 0 \\ & {}' x^t + p \in X \end{aligned}$$

Vi har $x^0 = (0,0)^T$ och väljer $\lambda^0 = 0$. Då följer att $L(x, \lambda^0) = f(x)$ och vi får som subproblem (med $p = x - x^0$) (ty $\nabla g(x^0) = 0$)

$$\begin{array}{ll} \min f(x) & \text{Sätt } \nabla f(x) = \mathbf{0} =: x = (1, 1/4)^T \in X. \\ \text{då } x \in X & \text{Så } p^0 = x - x^0 = (1, 1/4)^T. \end{array}$$

Med max-steg 1 i riktning p kan inte X överskridas. Vi inkluderar bara g i straffunktionen:

$$g(x) := \min_{\ell \in [0,1]} f(x^0 + \ell p^0) + 10 * \psi(x^0 + \ell p^0), \psi(x) = \min \frac{1}{2}\{g(x), 0\}^2$$

Vi använder Armijos steglängdsregel med acceptansparameter 0.1 och får:

$$q(x^0 + \ell p^0) - q(x^0) \leq 0.1 \ell \nabla w(x^0)^T p^0$$

uppfyllt med $\ell = 1 \quad \because x^1 = x^0 + p^0 = (1, 1/4)^T$.
$(\approx -1.05 \leq 0.1 \cdot (-9/4))$.

6 a) Sant. Bevistekniken (motsägelsetype) visar väsentligen att Q måste vara positivt semidefinit på det tillåtna underrummet för att ett lokalt minimum ska kunna finnas. Så i praktiken har vi därför ett konvext problem, under denna förutsättning.

b) Falskt. Motexempel: $f(x) = x^3; x = 0; d = -1$.

c) Falskt.

7 a) Eulers sats: En Eulertur (en tur som användes varje båge exakt en gång existerar om och endast om varje nod i grafen har jämn valens (antalet bågar som utgår från varje nod är jämnt).

b) Vi konstruerar ett ekvivalent problem genom att resonera som följer. Antag att vi har en brevbärartur i grafen, och att x_e är det antal gånger extra (≥ 1) som båge e används. Konstruera en graf där e reproduceras $1 + x_e$ gånger. Denna graf har en Eulertur. Vi kan alltså formulera problemet som det att finna den billigaste uppsättningen x_e sådan att den konstruerade grafen uppfyller kraven i uppg. H b).

$$\begin{array}{ll} \text{minimera} & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e \\ \text{då} & \sum_{e \in A(i)} x_e = |A(i)| \bmod 2, \quad i \in N \\ & x_e \geq 0, heltal, e \in E \end{array}$$

där $A(i)$ är mängden av bågar som ansluter till nod i.

c) Noderna A,B,C,D,E och F har udda valens, och AC, BE och DF utnyttjas två gånger. Ett billigare sätt att addera "x_e" är att ersätta AC, DF med AX, XZ, ZF och DC (minskad kostnad: 50).
Ny rutt: AY2FDCDEBE2FYXZXACBXA.