TMA946/MAN280
TILLÄMPAD OPTIMERINGSLÄRA

Datum:	02–08–26
Tid:	ML 7, eftermiddag
Hjälpmedel:	Typgodkänd räknedosa
Antal uppgifter:	7; för godkänd uppgift krävs 2 poäng av 3. Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. För godkänt krävs 10 poäng och tre godkända uppgifter.
Examinator:	Michael Patriksson
Jourhavande lärare:	Niclas Andréasson (0740-459022)
Resultat anslås senast:	02–09–09 Kortfattade lösningsförslag anslås vid skrivningstidens slut på anslagstavlan för optimeringslära vid matematiska institutionen.

Tentamensinstruktioner

<u>När Du löser uppgifterna</u>

Redovisa lösningsmetodik och beräkningar.
Använd generellt giltiga metoder, t.ex. de som genomgåtts i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

<u>Vid skrivningens slut</u>

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

(Linjärprogrammering)

Betrakta LP-problemet (OBS! max-problem) att

$$
\begin{array}{rrcrcrcl}
\text{maximera} & z = & x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{då} & & x_1 & - & x_2 & \geq & 1, \\
 & & x_1 & + & x_2 & \leq & 2, \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

(2p) a) Lös problemet på *korrekt* sätt med hjälp av simplexmetoden, dvs. med hjälp av både Fas I och Fas II.

(1p) b) Är den erhållna lösningen unik? Motivera algebraiskt utgående från Din lösning. Grafiska motiveringar accepteras *inte*, då dessa bara fungerar i låga dimensioner.

Några matrisinverser som kan komma väl till pass under lösandet är

$$
\begin{array}{ll}
\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

(3p)

Uppgift 2

(Modellering)

Aktiebolaget Sten & Grus (förkortas S&G) har fått ett kontrakt med Vägverket, enligt vilket de inom en månad skall leverera en viss mängd småflis till två centrallager, där bilar hämtar materialet för att sprida på vägarna under vintern. Den mängd som skall levereras per lager är l_1, l_2 ton, där siffran står för vilket lager som avses. Till sitt förfogande har S&G två grustag där man kan hämta grus och en bergtäkt där man kan hämta sprängsten, samt ett gammalt restlager av flis som ligger på annan ort. I sin anläggning har S&G en sikt och en bergskross. Gruset från grustagen körs genom sikten. För varje ton grus som körs genom sikten produceras a_1 ton småflis, a_2 ton makadam samt a_3 ton sand. För varje ton berg som körs genom krossen produceras k_1 ton småflis, k_2 ton makadam samt k_3 ton sand. Dessutom kan man köra makadam genom krossen varvid den producerar l_1 ton flis samt l_3 ton sand per ton makadam. Sikten har en maximal kapacitet vilket gör att vi kan köra igenom maximalt t_1 ton material på en månad. På samma sätt kan krossen maximalt behandla t_2 ton på den månad vi har till vår förfogande.

Den totala kostnaden för att bryta och köra berg till anläggningen är p_1 kr per ton; motsvarande kostnad för att bryta och transportera grus är p_2, p_3 för de båda grustagen. Makadam och sand är ej värdelöst; de kan säljas för d_2 respektive d_3 kr per ton. Inga transportkostnader uppkommer då kunderna själva hämtar dessa material. Vi antar att vi kan sälja obegränsade mängder makadam och sand. Kostnaden för att transportera flis från anläggningen till lagren är g_1, g_2 kr per ton. S&G har sedan tidigare ett gammalt lager med flis liggande på en annan plats (där man tidigare hade en nu nedlagd anläggning). I detta lager finns q ton flis vilket kan transporteras till vägverkets lager för h_1 respektive h_2 kr per ton.

Formulera en linjärprogrammeringsmodell som hjälper S&G att uppfylla kontraktet till lägsta nettokostnad (efter försäljning av makadam och sand). Vi vill även att ni ritar en bild som visar hur materal flödar genom modellen, där ni även sätter ut era variabler.

Sammanfattning:

l_1, l_2	Mängd flis (i ton) som skall levereras till vägverkets lager.
a_1, a_2, a_3	Ton flis, makadam och sand som produceras av sikten per ton grus in.
k_1,k_2,k_3	Ton flis, makadam och sand som produceras av krossen per ton berg in.
l_1,l_3	Ton flis och sand som produceras av krossen per ton makadam in.
p_1,p_2, p_3	Total kostnad (brytning och transport) för ett ton berg respektive grus från bergtäkt och grustag.
t_1, t_2	Total kapacitet i ton in i sikt respektive kross.
d_2,d_3	Försäljningspris för makadam och sand.
g_1, g_2	Transportkostnad (per ton) för flis från anläggning till Vägverkets lager.
h_1,h_2	Transportkostnad (per ton) för flis från restlager till Vägverkets lager.
q	Storlek hos restlager.

(3p) Uppgift 3

(LP-teori)

Betrakta LP-problemet på formen

$$\begin{aligned} \text{minimera } & c^{\mathrm{T}} x \\ \text{då } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Detta problem löses med simplex-algoritmen. Antag att det under ett givet steg finns endast en möjlig inkommande variablel, x_i. Vi antar vidare att detta steg är icke degenererat, dvs. målfunktionsvärdet har avtagit efter pivoteringen. Kommer x_i att vara nollskild i varje optimal lösning (dvs. vara med i varje optimal bas)? Motivera Ditt svar väl.

Uppgift 4

(Olinjär optimering)

(1p) a) Betrakta optimeringsproblemet att

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimera}} \ f(x) = \frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2) + (1+a)x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + b, \tag{1}$$

där a och b är reella parametrar.

Finn alla möjliga värden på a och b sådana att problemet (1) har en unik global optimallösning. Ange den också (i termer av värdena på parametrarna).

(1p) b) Betrakta problemet att

$$\underset{x \in \Re}{\text{minimera}} \ f(x) = x^{\frac{4}{3}} \quad \left(= \sqrt[3]{x^4}\right), \tag{2}$$

som har $x^* = 0$ som sin unika globala optimala lösning.

Beskriv hur Newtons metod (med en konstant steglängd 1) ser ut för problem i en variabel och applicera den på detta problem. Visa att algoritmen divergerar oavsett valet av startpunkt x_0, så länge $x_0 \neq 0$. Förklara varför detta händer.

(1p) c) I numeriska implementeringar av optimeringsalgoritmer, beroende på olika typer av numeriska fel, kommer beräkningen av gradienten till funktionen $f : \Re^n \mapsto \Re$ i $x \in \Re^n$ vanligen resultera i $(I + \mathcal{E}(x))\nabla f(x)$, där $\nabla f(x)$ är det korrekta värdet och $\mathcal{E}(x)$ är en matris av feltermer. (Både I och $\mathcal{E}(x)$ är $n \times n$-matriser.)

Ange villkor på matrisen $\mathcal{E}(x)$ som medför att vi kan garantera att riktningen $-(I + \mathcal{E}(x))\nabla f(x)$ är en descentriktning i en punkt x där $\nabla f(x) \neq 0^n$.

Observera: det villkor Ni ger skall inte innehålla värdet av $\nabla f(x)$, eftersom villkoret inte har ett sådant beroende.

Uppgift 5

(Optimalitetsvillkor)

(1p) a) Betrakta det begränsade problemet

$$\begin{aligned} &\underset{x \in \Re^n}{\text{minimera}}\ f(x), \\ &\text{då} \begin{cases} h_1(x) &= 0, \\ \vdots & \\ h_m(x) &= 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

där f, $h_1, \dots, h_m$ är en gång kontinuerligt differentierbara funktioner.

Visa att problemet (1) är ekvivalent med följande problem som har ett enda olikhetsvillkor:

$$\begin{aligned} &\underset{x \in \Re^n}{\text{minimera}}\ f(x), \\ &\text{då} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \big(h_i(x)\big)^2 \leq 0. \right. \end{aligned} \tag{2}$$

Visa (via ett formellt argument eller ett illustrativt exempel) att KKT-villkoren för problemet (2) *aldrig* är nödvändiga för lokalt optimum.

Ledning: Vilka " constraint qualification" (CQ) kan möjligen vara uppfyllda för problemet (1)?

Kan några CQ vara uppfyllda för problemet (2)? Om det är så, vilka?

(2p) b) Betrakta det obegränsade problemet att

$$\underset{x \in \Re^n}{\text{minimera}}\ \max\big\{f_1(x), f_2(x)\big\},$$

där $f_1 : \Re^n \to \Re$, $f_2 : \Re^n \to \Re$ är en gång kontinuerligt differentierbara funktioner.

Visa att om x^* är ett lokalt minimum för problemet, så existerar $\mu_1, \mu_2 \in \Re$ så att

$$\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \quad \mu_1 \nabla f_1(x^*) + \mu_2 \nabla f_2(x^*) = 0, \quad \mu_1 + \mu_2 = 1,$$

och $\mu_i = 0$ om $f_i(x^*) < \max\big\{\, f_1(x^*), f_2(x^*) \,\big\}$, $i = 1, 2$.

(3p) **Uppgift 6**

(Konvexitet)

Definiera begreppen konvex mängd och konvex funktion. Visa att begreppen är (i en viss mening) ekvivalenta genom att visa att för en funktion $f : \Re^n \mapsto \Re$ gäller att den är en konvex funktion om och endast om dess *epigraf*,

$$\operatorname{epi} f = \{\, (x, \alpha) \mid f(x) \leq \alpha \,\},$$

är en konvex mängd.

Uppgift 7

(Pseudokonvexitet)

De *pseudokonvexa* funktionerna är en betydelsefull klass av funktioner, genom att flera viktiga egenskaper som konvexa funktioner har också innehas av dessa. Så till exempel är de tillräckliga villkoren för global optimalitet som uppfylls av konvexa funktioner också tillräckliga för pseudokonvexa funktioner. Eftersom det existerar intressanta optimeringsproblem där målfunktionen är pseudokonvex men inte konvex är vikten av dessa egenskaper självklar. Målet med uppgiften är att utreda just dessa egenskaper.

(1p) a) En funktion $f : \Re^n \mapsto \Re$ som är en gång kontinuerligt differentierbar sägs vara pseudokonvex om

$$\nabla f(x)^{\mathrm{T}}(y - x) \geq 0 \implies f(y) \geq f(x), \qquad x, y \in \Re^n.$$

(Definitionen säger i princip att om det i x lutar uppåt mot punkten y så är målfunktionsvärdet i y större än i x.) Visa att en konvex funktion är pseudokonvex. Visa också att omvändningen inte gäller, alltså att det finns pseudokonvexa funktioner som inte är konvexa. Ge gärna ett motexempel.

(2p) b) För konvexa problem gäller följande nödvändiga och tillräckliga villkor för att $x^* \in X$ skall vara ett globalt minimum för problemet att

$$\begin{aligned} &\underset{x \in \Re^n}{\text{minimera}}\ f(x), \\ &\text{då } x \in X, \end{aligned}$$

där $X \subseteq \Re^n$ är en sluten och konvex mängd:

$$\nabla f(x^*)^{\mathrm{T}}(y - x^*) \geq 0, \qquad y \in X.$$

Visa att detta villkor är både nödvändigt och tillräckligt även om f "bara" är pseudokonvex.

Lycka till!