Tentamen TMA945/MAN280 Optimeringslära 000306

1 a) Efter tilläggs av en slackvariabel fås:

$$\begin{aligned} \min z = & -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ \text{då} \quad & 2x_1 - x_2 + \ \ x_3 + s_1 = 20 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad = 20 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad s_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Fas-1-problemet:

$$\begin{aligned} \min w = & \ a_1 \\ \text{då} \quad & 2x_1 - x_2 + \ \ x_3 + s_1 \qquad = 20 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad + a_1 = 20 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \quad s_2, \quad a_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Startbas: $(s_1, a_1); w = a_1 = 40 - x_1 - 2x_2 - 4x_3$

bas	$-w$	x_1	x_2	x_3	s_1	a_1	$\bar{b}$	
$-w$	1	-1	-1 -2	0	0	-20	x_3 ink.	
s_1	0	2	-1	1	1	0	20	a_2 utg.
a_1	0	1	1 $\boxed{2}$	0	1	20		
$-w$	1	0	0	0	0	1	0	
s_1	0	$3/2$	$-3/2$	0	1	$-1/2$	10	$\bar{c}_w \geq 0 \rightarrow$ Fas-1 optimum!
x_3	0	$1/2$	$1/2$	1	0	$1/2$	10	$w^* = 0 \rightarrow$ tillåten lösning funnen!

Återta

$$\begin{aligned} z &= -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -4x_1 - 2x_2 - 4(10 - 1/2x_1 - 1/2x_2) \\ &= -40 - 2x_1 \end{aligned}$$

bas	$-z$	x_1	x_2	x_3	s_1	$\bar{b}$	
$-z$	1	-2	0	0	0	40	x_1 ink.
s_1	0	$\boxed{3/2}$	$-3/2$	0	1	10	s_1 utg.
x_3	0	$1/2$	$1/2$	1	0	10	
$-z$	1	0	-2	0	$4/3$	$160/3$	x_2 ink.
x_1	0	1	-1	0	$2/3$	$20/3$	x_3 utg.
x_3	0	0	$\boxed{1}$	1	$-1/3$	$20/3$	
$z - 1$	1	0	0	2	$2/3$	$200/3$	
x_1	0	1	0	1	$1/3$	$40/3$	$\bar{c}_z \geq 0 \rightarrow$ fas-2 optimum!
x_2	0	0	1	1	$-1/3$	$20/3$	

Optimum: $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (40/3, 20/3, 0); z^* = 200/3$.

b) $x_B = (s_1, x_3)^T \to B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow Bx_B = b \Leftrightarrow x_B = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$

$B^T y = c_B \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$;

$\bar{c}_N^T = c_N^T - y^T N = (-4, -2) - (0, -2) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = (-4, -2) - (-2, -2) =$ $(-2, 0) \Rightarrow x_1$ inkommande.

$B\bar{a}_1 = a_1 \Leftrightarrow \bar{a}_1 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \min\{\frac{10}{3/2}, \frac{10}{1/2}\} = \frac{20}{3} \Rightarrow s_1$ utgående.

$x_B = (x_1, x_3)^T \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow Bx_B = b \Leftrightarrow x_B = \begin{bmatrix} 20/3 \\ 20/3 \end{bmatrix}$

$B^T y = c_B \Leftrightarrow y = \begin{bmatrix} -4/3 \\ -4/3 \end{bmatrix}; \bar{c}_N^T = c_N^T - y^t N = (-2, 0) - (-4/3, -4/3) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$ $(-2, 4/3)$

Dualen är:

$\max v = 20y_1 + 20y_2$

$$\text{då} \begin{cases} 2y_1 + \ \ y_2 \leq -4 & \text{uppfylls} \\ -y_1 + \ \ y_2 \leq -2 & \text{uppfylls ej} \quad \leftarrow \\ \ \ y_1 + 2y_2 \leq -4 & \text{uppfylls} \\ \ \ y_1 \leq 0 & \text{uppfylls} \end{cases}$$

2 a) Primal tillåtenhet:
$$\begin{aligned} g_1(x) &= -2x_1 + 2x_2 - 1 \\ g_2(x) &= -2x_1 + \ \ x_2 \\ g_3(x) &= - \ \ x_1 \\ g_4(x) &= \ \ \ \ \ \ \ x_2 \end{aligned}$$

Med $\bar{x}(0, \frac{1}{2}) : g_1(\bar{x}) = 0, g_2(\bar{x}) > 0, g_3(\bar{x}) = 0, g_4(\bar{x}) > 0$

Komplementaritet: från ovan fås att $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$

Dual tillåtenhet:
$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= (8x_1 - 6x_2 + 1, 4x_2 - 6x_1)^T \\ \nabla g_1(x) &= (-2, 2)^T \\ \nabla g_3(x) &+ (-1, 0)^T \end{aligned}$$

Med $\bar{x} = (0, \frac{1}{2}) : \nabla f(\bar{x}) - \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) - \lambda_3 \nabla g_3(\bar{x}) = (0, 0)^T$,

d.v.s. $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} - \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. $\quad \lambda_1 = 1, \lambda_3 = 0$

$\lambda = (1, 0, 0, 0)^T \geq \mathbf{0}$. KKT-villkoren är uppfyllda!

b) Svaret är att $\bar{x}$ är ett globalt minimum. Att verifiera det är inte lätt, beroende på att f inte är en konvex funktion, så att problemet faktiskt inte är konvext. (Vi kan verifiera att $\bar{x}$ uppfyller andra ordningens nödvändiga krav för lokalt minimum, men inte andra ordningens tillräckliga krav för lokalt minimum.) Det enda sättet att verifiera att $\bar{x}$ är ett globalt minimum är att resonera som följer.

Uppenbarligen är f en funktion som växer mot $+\infty$ i alla tillåtna riktningar. Eftersom den tillåtna mängden är sluten och icke-tom och f är kontinuerlig, kan vi dra slutsatsen att f måste anta sitt minsta värde på den tillåtna mängden, alltså att det *existerar*(Weierstrass Sats!) en optimallösning till problemet. Eftersom den tillåtna mängden är konvex och har en inre punkt kan vi också konstatera att varje lokalt (och globalt förstås!) minimum måste vara en KKT-punkt. Strategin här blir alltså att finna samtliga KKT-punkter och visa att $\bar{x}$ (om det finns fler KKT-punkter än den) är den bästa. (Detta är egentligen ingen metod för att finna en optimallösning, men här finns knappast något bättre alternativ.)

Innan vi börjar kan vi först konstatera att bivillkor (2) är redundant, eftersom det följer av teckenkraven på x. Det underlättar analysen att ta bort det. Vi kommer i tur och ordning att gissa vilka bivillkor som är aktiva.

1. Inga bivillkor är aktiva. Då fås som KKT:
   $\nabla f(x) = \mathbf{0}$, dvs $(8x_1 - 6x_2 + 1, -6x_1 + 4x_2) = (0, 0)$, d.v.s.
   $x = (1, 3/2)^T$. Detta är en otillåten punkt.
2. Alla bivillkor är aktiva. Uppenbarligen omöjligt, ty $x = (0, 0)^T$ är otillåtet.
3. Bivillkor (1) är aktivt. Då fås som KKT:
   $$\begin{bmatrix} 8x_1 - tx_2 + 1 \\ -6x_1 + 7x_2 \end{bmatrix} - \lambda_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
   En parametrisk lösning är:
   $(x_1, x_2) = (1, 3/2) - \lambda_1(1, 1), \lambda_1 \geq 0$. Med kraven (2) och (3) fås att $\lambda_1 = [1, 3/2]$. Insättning i f ger också att $f(x) = 1$ för alla x på denna form. Så $x = 1, 3/2) - \lambda_1(1, 1), \lambda - [1, 3/2]$ är samtliga KKT-punkter, med samma målfunktionsvärde. Notera att med $\lambda_1 = 1$ fås $x = \bar{x}$!
4. Bivillkor (2) är aktivt. Med $x_1 = 0$ fås ur KKT att också $x_2 = 0$, vilket ger en otillåten punkt.
5. Bivillkor (3) är aktivt. Ger också $x = (0, 0)^T$.
6. Bivillkor (1) och (2) är aktivt. Ger $x = (0, 1/2)^T$, d.v.s. $\bar{x}$.
7. Bivillkor (1) och (3) är aktivt. Ger $x = (1/2, 0)$ som är otillåtet.

detta är samtliga kombinationer. Ur detta fås att mängden av KKT-punkter är

$$x = (1, 3/2)^T - \lambda_1(1, 1)^T, 1 \leq \lambda_1 \leq 3/2.$$

Samtliga dessa har målfunktionsvärde 1, och är alltså globalt optimala. Ibland dessa återfinns $\bar{x}$.

3 a) Låt $(\hat{A}, \hat{b})$ vara de rader i (A, b) som motsvarar de bivillkor som är aktiva i x_*, d.v.s. där $a_i^T x_* = b_i$. Att det inte existerar en tillåten riktning i x_* som samtidigt är en descentriktning kan beskrivas som att det <u>inte</u> finns ett $p \in \mathbb{R}^n$ med $\nabla f(x_*)^T p < 0$ och $\hat{A}p \geq \mathbf{0}$.

Optimalitetsvillkor. Om x_* är ett lokalt min existerar $\hat{\lambda}_* \geq \mathbf{0}$ så att $\nabla f(x_*) = \hat{A}^T \hat{\lambda}_*$.

b) tolka: $x = p; B = \hat{A}; c = \nabla f(x_*)$. Då är utsagan att det <u>inte</u> existerar en tillåten descentriktning i x_* ekvivalent med att systemet I <u>inte</u> har en lösning. Farkas Lemma leder då till att systemet II har en lösning. Tolkas II i detta problem fås, med $y = \hat{\lambda}_*$, att det existerar $\hat{\lambda}_* \geq \mathbf{0}$ så att $\hat{A}^T \hat{\lambda}_* = \nabla f(x_*)$, d.v.s. första ordningens nödvändiga krav!

4 a) Dualen till (P) är

$$
\text{(D)} \qquad \begin{aligned} &\max w = 240y_1 + 60y_2 \\ &\text{då} \begin{cases} 2y_1 + 2y_2 \leq 100 \\ 6y_1 + \ \ y_2 \leq 100 \\ 10y_1 \qquad \leq 100 \\ y_1, \quad y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}
$$

Geometrisk lösning av (D) ger: $y_* = (10, 40)$. (Men detta behövs inte. Vi härleder den lösningen nedan.)

För att verifiera att $x_* = (12, 36, 0)^T$ utnyttjas de tre optimalitesvillkoren i LP.

Primal tillåtenhet:
$$
\begin{aligned} &2x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 240 \qquad \text{OK} \\ &2x_1 + \ \ x_2 \qquad\quad = 60 \\ &x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 = 0 \end{aligned}
$$

Komplementaritet:
$$
\begin{aligned} &y_1 \cdot (2x_1 + 6x_2 + 10x_3 - 240) = 0 && o \\ &y_2 \cdot (2x_1 + \ \ x_2 \qquad\quad - 60) = 0 && ii \\ &x_1 \cdot (2y_1 + 2y_2 - 100) = 0 && iii \\ &x_2 \cdot (6y_1 + \ \ y_2 - 100) = 0 && iv \\ &x_3 \cdot (10y_1 \qquad - 100) = 0 && v \end{aligned}
$$

ger ur iii och iv att $\begin{matrix} 2y_1 + 2y_2 = 100 \\ 6y_1 + \ \ y_2 = 100 \end{matrix}$, d.v.s. $y_1 = 10, y_2 = 40$.

Du tillåtenhet: återstår att kontrollera:
$$
\begin{aligned} &10y_1 \leq 100 \quad \text{ok} \\ &y_1, y_2 \geq 0 \quad \text{OK} \end{aligned}
$$

Alla optimalitetsvillkoren uppfylls tillsammans med den (unika) duala optimalllösningen $y_* = (10, 40)^T$.

b) Med utgångspunkt från den optimala duala optimallösningen utnyttjas optimalitetsvillkoren för att finna samtliga x_* som satisfierar dem.

$y_* = (10, 40)^T$ uppfyller de tre linjära bivillkoren i (D) med likhet, så iii - v ger inget. Ur i - ii fås ($y_* > 0$!):

$$\left.\begin{array}{ll} 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 240 \\ 2x_1 + x_2 = 60 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 12 + x_3 \\ x_2 = 36 - 2x_3 \end{array}$$

Primal tillåtenhet som återstår att lägga till är $x \geq \mathbf{0}$, vilket ger att $x_3 = 18$ måste gälla.

Samtliga optimallösningar ges alltså av:

$$x_* = \begin{bmatrix} 12 \\ 36 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 18.$$

5 a) Att steglängden blir noll beror på att sökriktningen inte är en descentriktning. Anledningen till detta är att Hessianen $\nabla^2 f(x_k)$ i den aktuella punkten x_k är indefinit eller negativ (semi)definit.

b) Att sökriktning saknas beror på att det linjära systemet $\nabla^2 f(x_k)p = -\nabla f(x_k)$ inte kan vara inverterbar (notera dock att systemet kan vara lösbart för vissa högerled även om $\nabla^2 f(x_k)$ inte är inverterbar, som t.ex. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} p = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ som har lösningen $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$), vilket gäller speciellet om determinanten för $\nabla^2 f(x_k)$ är noll (ett egenvärde till $\nabla^2 f(x_k)$ är noll).

c) I Levenberg-Marquardts modifiering av Newtons metod undersöks egenvärdena till $\nabla^2 f(x_k)$ under tiden som systemet $\nabla^2(x_k)p = - = \nabla f(x_k)$ löses. Om ett negativt egenvärde påträffas (genom att t.ex. ett pivotelement i Gauss-eliminationen är negativt) adderas en positiv term till diagonalen av $\nabla^2 f(x_k)p = -\nabla f(x_k)$ ersätts av ett system på formen $[\nabla^2 f(x_k) + \gamma I]p = -\nabla f(x_k)$, där $\gamma > 0$ har valts så att $\nabla^2 f(x_k) + \gamma I$ är positivt definit. Eftersom detta gäller, existerar p (så problemet i b) försvinner), och $\nabla f(x_k)^T p = -p^T[\nabla^2 f(x_k) + \gamma I]p < 0$ av samma skäl, så p är en descentriktning (problemet i a) försvinner också). Alternativ: gör en iteration av brantaste lutningsmetoden.

6. Låt $X = \{x \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x_j = 1, j = 1, 2\}$.

$L(x, \lambda) := f(x) - \lambda \cdot (3x_1 + 2x_2 - 4), \lambda \geq 0$. Lagrangeduala problemet är då att

(LD) $$\max_{\lambda \geq 0} L(\lambda),$$

där $L(\lambda) = \min_{x \in X} L(x, \lambda)$. Utvecklas $L(x, \lambda)$ fås:

$$
\begin{aligned}
L(\lambda) &= 4\lambda + \min_{0 \le x, \le 1} \{(1 - 3\lambda)x_1\} + \min_{0 \le x_2 \le 1} \{(1 - 2\lambda)x_2\} \\
&= \begin{cases} 4\lambda, & 0 \le \lambda \le 1/3 \\ 1 + \lambda, & 1/3 \le \lambda \le 1/2 \\ 2 - \lambda, & 1/2 \le \lambda \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\lambda_* = 1/2; L(\lambda_*) = 3/2$.

Problemet är konvext och det existerar en inre punkt i det tillåtna området. Stark dualitet gäller alltså, och en primal optimallösning kan lösas ut ur optimalitetsvillkoren:

Motsvarigheten till "$\nabla_t L(x_*, \lambda_*) = \mathbf{0}$" i KKT i det konvexa fallet är att x_* löser $\min\limits_{x \in X} L(x, \lambda_*)$, d.v.s. x_* löser $\min\limits_{0 \le x, \le 1} \{-\frac{1}{2} x_1\}$ och $\min\limits_{0 \le x_2 \le 1} \{0, x_2\}$, med optimallösning $x_1 = 1$ och $x_2 \ni [0, 1]$.

Komplementaritet ger ($\lambda_* > 0!$) att $3x_1 + 2x_2 = 4$. Med $x_1 = 1$ ger det att $x_2 = 1/2$.

Primal tillåtenhet gäller eftersom $x \in X$ och det linjära bivillkoret (1) är uppfyllt med likhet.

Så $x_* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ är den unika optimallösningen.

(Notera att $f(x_*) = 3/2 = L(\lambda_*)$.)

7. Variabeldeklaration:

y_t = 1 om vi rekryterar i månad t, 0 annars ($t = 1, \ldots, 10$).

x_{st} = antalet nyrekryterande den förste i månad s som avskedas den siste. i månad t ($s = 1, \ldots, 10 : t = 1, \ldots, 10$)

$ö_t$ = överbemaning under månad t ($t = 1, \ldots, 10$).

Modell: $\min f(y, ö) = \sum^{10} t = 1 s_t y_t + \sum_{t=1}^{10} c_t ö_t$

då

(1) $$\sum_{i=1}^{t} \sum_{k=t}^{10} x_{ik} = r_t + ö_t \quad (t = 1, \ldots, 10)$$

(2) $$x_{st} = 0 (t = 1, \ldots, 9, s \geq t - 2)$$

(3) $$\sum_{t=s}^{10} x_{st} \leq M \cdot y_t (t = 1, \ldots, 10) \quad (M \gg 0)$$

$$y_t \in \{0, 1\} \quad (t = 1, \ldots, 10)$$
$$x_{st} \geq 0, \text{ heltal } (s = 1, \ldots, 10 : t = 1, \ldots, 10)$$
$$ö_t \geq 0, \text{heltal } (t = 1, \ldots, 10)$$

(1): antalet arbetande under månad t = kravet + överbemanning;

(2): förbjudet att avsheda någon före tre månader om start före månad 9_j

(3): ej anställning $(x > 0)$ om inte rekrytering skett $(y > 0)$