Tentamen TMA945 Tillämpad optimeringslära 980527

1 a) $y_3^* = 1$. Giltighet:

$$B^{-1}b^{NY} = B^{-1}\left(b + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \Delta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \Delta \in [-10, 6] \quad \because b_2 \in [-3, 13].$$

b) $\Delta b_2 = 8 > 6$. Nuvarande bas B är optimal men otillåten. Duala simplex återställer tillåtenhet.

bas	$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	
$-z$	1	0	0	0	-1	-2	-21	
x_2	0	0	1	0	$1/2$	$1/2$	9	s_1 utgående
x_1	0	1	0	0	0	1	3	s_2 inkommande
s_1	0	0	0	1	$\boxed{-1/2}$	$3/2$	-1	
$-z$	1	0	0	-2	0	-5	-19	
x_2	0	0	1	1	0	2	8	tillåten!
x_1	0	1	0	0	0	1	3	
s_2	0	0	0	-2	1	-3	2	

Nytt optimum: $x^* = (3, 8)^*$; $z^* = 19$. Förändring i $\Delta z = 6$.

c) I den nuvarande basen har x_3 den reducerade kostnaden

$$\bar{c}_3 = c_3 - c_B^T B^{-1} a^3 = c_3 - (0, 1, 2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_3 - 3.$$

For att z^* skall öka måste $\bar{c}_3 > 0$ gäller, d.v.s. $c_3 > 3$.

2 a) (Motsägelsebevis) Antag att för något $b > 0$ det existerar ett $\bar{x}$ med $f(\bar{x}) < f(x^*), \bar{x} \in x, g(\bar{x}) \leq b$. Bilda $x_\lambda = x^* + \lambda(\bar{x} - x^*)$. För $\lambda > 0$ tillräckligt litet gäller att $g(x_\lambda) < 0$, ty $g(x_\lambda) \leq \lambda g(\bar{x}) + (1-\lambda) g(x^*) \leq g(x^*) + \lambda(b - g(x^*))$. Men vi har också att $f(x_\lambda) \leq \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(x^*) < f(x^*)$. Om $\lambda \leq 1$ gäller dessutom att $x_\lambda \in C$. Alltså är x_λ tillåten i [p], och $f(x_\lambda) < f(x^*)$ motsäger optimaliteten hos x^* i [p]. ■

b) Konvexitet är nödvändigt! Motexempel

I princip kan konvexa problem lösas genom att först lösa ett problem där färre bivillkor tas med, och adderas successivt då de blir överskridna. På motsvarande sätt tas redundanta villkor bort. Detta är en typ av 'active set'-metod som dock kan vara ineffektiv, då det kan kräva många iterationer att identifiera de bivillkor som måste vara med (d.v.s. vilka andra som kan tas bort.)

3 a) [D] $\min p(y) = b_1^* y_1 + b_2^* y_2 + b_3^T y_3$

$$\text{då} \begin{cases} \\ \\ A_{11}^T y_1 + A_{21}^T y_2 + \qquad\qquad \geq c_1 \\ A_{12}^T y_1 \qquad\qquad + A_{32}^T y_3 \geq c_2 \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \text{fri} \end{cases}$$

b) $f_2^* \leq f^* \leq f_1^*$. (Ökning av b_1 ger större tillåten mängd, medan ökning av b_2 ger mindre tillåten mängd. Ökning av b_3 kan ge något av dessa fall, men det beror på data A och b.)

4. **Variabeldef.:** x_{ijk} = antal ärenden av type i som flyter in under vecka j och behandlas under vecka k, $i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n; k = j, \ldots, n.$

Bivillkor:

- $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} a_i x_{ijk} \leq b_k, k = 1, \ldots, n$ (kapacitet)
- $\sum_{k=j}^{n} x_{ijk} = h_{ij}, i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$ (alla ärenden behandlas)
- $x_{ijk} \geq 0$, heltal, $i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$, (def.)
  $k = j, \ldots, n$

Förslag på målfunktion

$$\text{minimera } f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} k x_{ijk}$$

5 a) Om $\bar{x}$ uppfyller $A\bar{x} \geq b$ och $\beta \geq 0^m$ följer att $\beta^T A\bar{x} \geq \beta^T b$. Alltså är den tillåtna mängen i $[p(\beta)]$ större än i $[p]$, varur olikheten följer.

b) Optimalitetsvillkoren för $[p]$ är:

$$\left.\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0^n \\ \\ y^T(Ax-b) &= 0 \\ x^T(A_y^T - c) &= 0 \\ \\ A^T y &\geq c \\ y &\geq 0^m \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Motsvarande för $[p(\beta)]$ är: $/\pi$ dualvar/

$$\left.\begin{aligned} \beta^T Ax &\leq \beta^T b \\ x &\geq 0^n \\ \\ \pi \cdot (\beta^T Ax - \beta^T b) &= 0 \\ x^T(A^T\beta\pi - c) &= 0 \\ \\ A^T\beta\pi &\geq c \\ \pi &\geq 0 \end{aligned}\right\} \quad (**)$$

Låt (x^*, y^*) lösa $(*)$. Sätt $\beta^* = y^*$ och $\pi^* = 1$. Det är lätt att se att (x^*, β^*, π^*) löser $(**)$. Speciellt gäller alltså att x^* löser $[p(\beta^*)]$, varur likheten följer.

6 a) $f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2)^2 + x_1^4; \nabla f(x) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 + 4x_1^3 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix};$

$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 1 + 12x_1^2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, x^0 = (2,1)^T, f(x^0) = 16.$

$$\nabla f(x^0) = \begin{bmatrix} 32 \\ 0 \end{bmatrix}; \nabla^2 f(x^0) = \left(\begin{matrix} 49 & -2 \\ -2 & 4 \end{matrix} = \right]$$

$$\nabla^2 f(x^0) d^1 = -\nabla f(x^0) \Leftrightarrow d^1 = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla (x^0)^T d^1 = -(d^1)^T \nabla^2 f(x^0) d^1 = -64/3.$$

Sätt $\ell = 1$. $x^0 + \ell d^1 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. $f(x^0 + \ell d^1) = 256/81$.

Gäller

$$\begin{aligned} f(x^0 + \ell d^1) - f(x^0) \leq \alpha \ell \nabla f(x^0)^T d^1? \\ \Leftrightarrow \\ -12\frac{68}{81} \leq -\alpha \cdot 64/3 \end{aligned} \qquad (*)$$

Med $\alpha = 0.3$ är svaret 'ja'. Låt $\ell = 1$.

$$x^1 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Olikheten $(*)$ uppfyller om $\alpha \tilde{\in} (0, 0.60)$.

7 a) $[p_1(\rho)]$ $\quad \min \pi(x, \rho) = f(x) + (\rho/2) \sum_{i=1}^{m} h_i^2(x)$

$p_2(\mu)]$ $\quad \min \beta(x, \mu) = f(x) - \mu \sum_{j=1}^{n} \log(g_j(x))$

b) $p_1(\rho)]$ $\quad \nabla_x \pi(x, \rho) = \nabla f(x) + \rho \sum_{i=1}^{m} \nabla h_i(x) h_i(x) = \mathbf{0}$

Sätt $\lambda_i(\rho) = -\rho h_i(x)$, vilket ger $\nabla f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\rho) \nabla h_i(x) = \mathbf{0}$

$[p_2(\mu)]$ $\quad \nabla_x \beta(x, \mu) = f(x) - \mu \sum_{j=1}^{r} \nabla g_i(x)/g_j(x) = \mathbf{0}$

Sätt $\lambda_j(r) = \mu/g_j(x)$, vilket ger $\begin{cases} \nabla f(x) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j(\mu) \nabla g;(x) = \mathbf{0} \\ \lambda_j(\mu) \geq 0, \forall j \\ \lambda_j(\mu) g_j(x) = \mu, \forall j \end{cases}$

Om x konvergerar mot en KKT-punkt då $\rho \to +\infty$ resp. $\mu \to 0$ går $\lambda_i(\rho)$ resp. $\lambda_j(\mu)$ mot multiplikatorer.