Lösningar till tentamen i Inledande Mat. Analys F1, 18/10-00.

1a. Vi har att

$$V_x = \pi \int_0^\infty (e^{-3x})^2\,dx = \pi\Big[-\frac{e^{-6x}}{6}\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{6}.$$

b. Vi har att

$$V_y = 2\pi \int_0^\infty xe^{-3x}\,dx = [\text{Part.int.}] = \frac{2\pi}{3}\big[-xe^{-x}\big]_0^\infty + \frac{2\pi}{3}\int_0^\infty e^{-3x}\,dt$$
$$= \frac{2\pi}{9}\big[-e^{-3x}\big]_0^\infty = \frac{2\pi}{9}.$$

Svar: **a.** $\frac{\pi}{6}$. **b.** $\frac{2\pi}{9}$.

2a.

$$\int_0^4 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \begin{bmatrix} t=\sqrt{x} \\ t^2 = x \\ 2t\,dt = dx \end{bmatrix} = 2\int_0^2 \frac{t^3}{1+t}\,dt = [\text{Pol. div.}]$$
$$= 2\int_0^2 t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}\,dt = 2\Big[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(1+t)\Big]_0^2 = 2\Big(\frac{8}{3} - \ln 3\Big).$$

b. $F'(x) = x|x-1|$ och $F(0) = 1$. För $x < 1$, har vi att $F'(x) = -x(x-1)$, så $F(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C_1$. $F(0) = 1$ ger att $C_1 = 1$. För $x \geq 1$, har vi att $F'(x) = x(x-1)$, så $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_2$. Kontinuitet av $F(x)$ i $x = 1$ kräver att $-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + C_2$, varur $C_2 = \frac{4}{3}$. Vi får att $F(3) = \frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + \frac{4}{3} = \frac{35}{6}$.
Svar: **a.** $2\Big(\frac{8}{3} - \ln 3\Big)$. **b.** $F(3) = \frac{35}{6}$.

3. Låt $f(x) = (x^2+1)^x + (x+1)^{(x+2)} = e^{x\ln(x^2+1)} + e^{(x+2)\ln(x+1)}$. Då är $f(1) = (1+1)^1 + (1+1)^3 = 10$ och vi skall finna tangenten i punkten $(1, 10)$. Derivering ger att

$$f'(x) = \Big(1\cdot\ln(x^2+1) + \frac{x\cdot 2x}{x^2+1}\Big)e^{x\ln(x^2+1)} + \Big(1\cdot\ln(x+1) + \frac{x+2}{x+1}\Big)e^{(x+2)\ln(x+1)},$$

så $f'(1) = \big(\ln 2 + \frac{2}{1+1}\big)\cdot 2 + \big(\ln 2 + \frac{3}{2}\big)\cdot 8 = 10\ln 2 + 14$. Ekvationen för tangenten blir nu

$$y - 10 = (10\ln 2 + 14)(x-1) \iff y = (10\ln 2 + 14)x - 10\ln 2 - 4.$$

Svar: Tangenten blir $y = (10\ln 2 + 14)x - 10\ln 2 - 4$.

4. Vi visar olikheten

$$3\big(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}\big) > 2n\sqrt{n}, \quad n \geq 1,$$

med hjälp av induktion.
I. Olikheten är sann för $n = 1$, ty

$$\text{V.L.}_1 = 3 > 2 = \text{H.L.}_1$$

IIa. Antag att olikheten är sann för $n = p - 1$, dvs

$$3\big(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{p-1}\big) > 2(p-1)\sqrt{p-1}.$$

IIb. Vi har att

$$\begin{aligned}
\text{V.L.}_p &= 3\big(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{p-1}\big)+3\sqrt{p} = [\text{Ind.ant.}] > 2(p-1)\sqrt{p-1}+3\sqrt{p} \\
&= 2p\sqrt{p}+\sqrt{p}+2(p-1)\sqrt{p-1}-2p\sqrt{p}+2\sqrt{p} \\
&= 2p\sqrt{p}+\sqrt{p}-2(p-1)(\sqrt{p}-\sqrt{p-1}) \\
&= 2p\sqrt{p}+\frac{\sqrt{p}\sqrt{p-1}-(p-1)+1}{\sqrt{p}+\sqrt{p-1}} = [\sqrt{p}>\sqrt{p-1}] \\
&> 2p\sqrt{p}+\frac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{p-1}} > 2p\sqrt{p} = \text{H.L.}_p.
\end{aligned}$$

III. Påståendet följer nu från induktionsprincipen.
Alternativ lösning: $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} > \int_0^n \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}n\sqrt{n}$.

5. Med $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ menas att till varje $\epsilon > 0$, så existerar $\delta > 0$ så att $|f(x)-A| < \epsilon$, $\forall x \in D_f : |x-x_0| < \delta$.

a. $f(x) = \sqrt{2x^2+3x+4}$, $x_0 = 1$. f Hypotes: $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 3$.
Bevis:

$$f(x)-3 = \frac{2x^2+3x+4-9}{\sqrt{2x^2+3x+4}+3} = \frac{2(x-1)(x+\frac{5}{2})}{\sqrt{2x^2+3x+4}+3}.$$

Vi observerar att $0 \le \frac{1}{\sqrt{2x^2+3x+4}+3} \le \frac{1}{3}$, och att, om säg $|x-1| < 1$, så $|x+\frac{5}{2}| \le |x-1|+\frac{7}{2} < \frac{9}{2}$. Alltså har vi att

$$|f(x)-3| \le 3|x-1|, \quad \forall x : |x-1| < 1.$$

och vi kan ta $\delta = \min\{1, \frac{1}{3}\epsilon\}$ (t ex).

b. $f(x) = \cos 2\pi x$, $x_0 = 1$. Hypotes: $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$.
Bevis:

$$f(x)-1 = \frac{\cos^2 2\pi x - 1}{\cos 2\pi x + 1} = -\frac{\sin^2 2\pi x}{\cos 2\pi x + 1} = -\frac{\sin^2 2\pi(x-1)}{\cos 2\pi(x-1)+1}.$$

Med hjälp av att $\cos t > 0$, då $|t| < \frac{\pi}{2}$, och $|\sin t| \le |t|$, får vi med $t = x-1$,

$$|f(x)-1| \le \big(2\pi|x-1|\big)^2, \quad \forall x : |x-1| < \frac{1}{4},$$

och vi kan därför välja $\delta = \min\{\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\pi}\}$ (t ex).

6. Skriv

$$\int_0^\infty x\sin x^3\,dx = \int_0^1 x\sin x^3\,dx + \int_1^\infty x\sin x^3\,dx.$$

Den första integralen är trivialt konvergent. För den andra gäller

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty x\sin x^3\,dx &= \begin{bmatrix} x^3 = t \\ x = t^{\frac{1}{3}} \\ dx = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}\,dt \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{\frac{1}{3}}}\,dt = [\text{Part.int.}] \\
&= \frac{1}{3}\Big[-\frac{\cos t}{t^{\frac{1}{3}}}\Big]_1^\infty - \frac{1}{9}\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^{\frac{4}{3}}}\,dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^{\frac{4}{3}}}\,dt.
\end{aligned}$$

Nu, $0 \le \left|\frac{\cos t}{t^{\frac{4}{3}}}\right| \le \frac{1}{t^{\frac{4}{3}}}$, $t > 0$, och $\int_1^\infty \frac{1}{t^{\frac{4}{3}}}\,dt$ konvergent. Jämförelsekriteriet ger därför att $\int_1^\infty \left|\frac{\cos t}{t^{\frac{4}{3}}}\right| dt$ är konvergent. Satsen om absolut konvergens ger slutligen att $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^{\frac{4}{3}}}\,dt$ är konvergent, och därmed är vår ursprungliga integral konvergent.
Svar: Konvergent.