Inledande matematisk analys F, HT 2000 26 september 2000

Lösningar till Övningsskrivningen 2000-09-23

Greger Cronquist

1. Bestäm gränsvärdena

a) $\lim_{x\to\infty}[\ln(3x^2+4x+5)-2\ln(2x+1)]$

b) $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2-4x-4}$

Lösning

a) Vi börjar med att skriva ihop de två logaritmerna,

$$\ln(3x^2+4x+5)-2\ln(2x+1)=\ln(3x^2+4x+5)-\ln(2x+1)^2=$$
$$=\ln\left(\frac{3x^2+4x+5}{(2x+1)^2}\right)=\ln\left(\frac{3x^2+4x+5}{4x^2+4x+1}\right),$$

varefter vi bryter ut den dominerande termen i täljaren och nämnaren och låter x gå mot oändligheten, vilket är tillåtet eftersom $\ln$ är en kontinuerlig funktion,

$$\ln\left(\frac{3x^2+4x+5}{4x^2+4x+1}\right)=\ln\left(\frac{x^2(3+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2})}{x^2(4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}\right)=\ln\left(\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}{4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\longrightarrow\boxed{\ln\frac{3}{4}},\quad \text{då } x\to\infty.$$

b) Om man sätter in $x=2$ i uttrycket får man "$\frac{0}{0}$" så både täljare och nämnare har nollställen i $x=2$. Detta betyder att vi kan faktorisera ut $(x-2)$ ur de båda polynomen varefter vi kan gå i gräns. Vi får alltså

$$\frac{2x^2-3x-2}{3x^2-4x-4}=\frac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)(3x+2)}=\frac{2x+1}{3x+2}\longrightarrow\boxed{\frac{5}{8}},\quad \text{då } x\to 2.$$

2. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y=4\arctan(x^3)$ i den punkt där $x=-1$.

Lösning Vi kan formeln för tangentlinjen, nämligen

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),$$

så med $f(x)=4\arctan(x^3)$ och $x_0=-1$ behöver vi räkna ut $f(x_0)$ och $f'(x_0)$. Eftersom $x_0^3=(-1)^3=-1$ och $\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$ får vi

$$y_0=f(x_0)=4\arctan(x_0^3)=4\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\pi.$$

Då skall vi räkna ut derivatan. Vi har att $D\arctan x=\frac{1}{1+x^2}$, så

$$Df(x)=\frac{4}{1+(x^3)^2}D(x^3)=\frac{12x^2}{1+x^6},$$

vilket med $x_0 = -1$ insatt ger att $f'(x_0) = 6$. Sätter vi in detta i tangentlinjeformeln ovan får vi slutligen

$$\begin{aligned} & y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \\ \Leftrightarrow \quad & y - (-\pi) = 6[x - (-1)] \\ \Leftrightarrow \quad & \boxed{y = 6x + 6 - \pi}. \end{aligned}$$

3. Undersök om funktionen f har någon invers och bestäm isåfall denna med angivande av definitions- och värdemängd, då

$$f(x) = \ln(x + 2) - \ln(1 - x).$$

Lösning Vi börjar med att utreda definitions- och värdemängderna för f, D_f och V_f. Definitionsmängden för logaritmfunktionen är $D_{\ln} =]0, \infty[$, så det måste gälla att

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -2 < x < 1.$$

Alltså är $D_f =]-2, 1[$. Om vi skriver om f som

$$f(x) = \ln(x + 2) - \ln(1 - x) = \ln \frac{x + 2}{1 - x}$$

ser vi att $f(x) \to \infty$ då $x \to 1^-$ och $f(x) \to -\infty$ då $x \to -2^+$. Alltså är $V_f =]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$. Vi ser också att f är strängt växande eftersom $\ln$ är strängt växande och $\frac{x+2}{1-x}$ är likaledes då $x + 2$ är strängt växande och $1 - x$ är strängt avtagande. En strängt växande eller avtagande funktion är alltid inverterbar, så f är inverterbar och inversen har definitions- och värdemängderna $D_{f^{-1}} = V_f = \mathbb{R}$, $V_{f^{-1}} = D_f =]-2, 1[$. För att räkna ut inversen sätter vi $f(x) = y$ och löser ut x. Vi börjar med att exponentiera, för att sedan lösa ut. Vi får att

$$\begin{aligned} f(x) = \ln \frac{x + 2}{1 - x} &= y \\ \Leftrightarrow \frac{x + 2}{1 - x} &= e^y \\ \Leftrightarrow x + 2 &= e^y(1 - x) \\ \Leftrightarrow x + 2 &= e^y - xe^y \\ \Leftrightarrow x + xe^y &= e^y - 2 \\ \Leftrightarrow x(1 + e^y) &= e^y - 2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{e^y - 2}{1 + e^y}, \end{aligned}$$

så, om vi byter bokstäver, får vi sammanfattningsvis

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{e^x - 2}{1 + e^x}, \qquad D_{f^{-1}} = \mathbb{R}, \quad V_{f^{-1}} =]-2, 1[}.$$

4. Bestäm (om möjligt) konstanter A, B, C, D, E och F, så att

$$\sum_{k=0}^{n} k^4 = An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + En + F.$$

Lösning Vi löser uppgiften med "bakvänd induktion" — dvs. vi börjar med induktionssteget för att sluta med startsteget. På det viset får vi tillräckligt många ekvationer för att lösa ut konstanterna, dessutom på ett väldigt smidigt sätt.

Induktionssteget. Vi antar att påståendet är sant för $n = p$ och försöker visa att det då också gäller för $n = p + 1$. Dvs. med hjälp av

$$\sum_{k=0}^{p} k^4 = Ap^5 + Bp^4 + Cp^3 + Dp^2 + Ep + F \tag{$\star$}$$

vill vi visa

$$\sum_{k=0}^{p+1} k^4 = A(p+1)^5 + B(p+1)^4 + C(p+1)^3 + D(p+1)^2 + E(p+1) + F. \tag{$\star\star$}$$

Nu kan vi bilda VL($\star\star$)$-$VL($\star$) och HL($\star\star$)$-$HL($\star$). Om dessa två uttryck är lika är vi klara. Först har vi

$$\begin{aligned}\mathrm{VL}(\star\star) - \mathrm{VL}(\star) &= \sum_{k=0}^{p+1} k^4 - \sum_{k=0}^{p} k^4 = \sum_{k=0}^{p} k^4 + (p+1)^4 - \sum_{k=0}^{p} k^4 = (p+1)^4 = \\ &= p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1\end{aligned}$$

och sedan

$$\begin{aligned}\mathrm{HL}(\star\star) - \mathrm{HL}(\star) &= A(p+1)^5 + B(p+1)^4 + C(p+1)^3 + D(p+1)^2 + E(p+1) + F \\ &- (Ap^5 + Bp^4 + Cp^3 + Dp^2 + Ep + F) = \\ &= A(p^5 + 5p^4 + 10p^3 + 10p^2 + 5p + 1) + B(p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1) \\ &+ C(p^3 + 3p^2 + 3p + 1) + D(p^2 + 2p + 1) + E(p+1) \\ &- Ap^5 - Bp^4 - Cp^3 - Dp^2 - Ep = \\ &= p^4(5A) + p^3(10A + 4B) + p^2(10A + 6B + 3C) + p(5A + 4B + 3C + 2D) \\ &+ (A + B + C + D + E)\end{aligned}$$

Vi kan nu identifiera koefficienterna framför de olika p-potenserna och får ekvationssystemet

$$\begin{cases} p^4: & 1 = 5A \\ p^3: & 4 = 10A + 4B \\ p^2: & 6 = 10A + 6B + 3C \\ p^1: & 4 = 5A + 4B + 3C + 2D \\ p^0: & 1 = A + B + C + D + E \end{cases}$$

Detta ekvationssystem är triangulärt, och om man börjar uppifrån är det lätt att lösa. Vi får

$$A = \frac{1}{5}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{3}, \quad D = 0, \quad E = -\frac{1}{30},$$

men inget villkor på F-konstanten. Det får vi däremot raskt om vi gör det första induktionssteget.

Startsteget. Vi vill ju att påståendet skall vara sant för $n = 0$ för att kunna komma igång med induktionen. Dvs.

$$\sum_{k=0}^{0} k^4 = A \cdot 0^5 + B \cdot 0^4 + C \cdot 0^3 + D \cdot 0^2 + E \cdot 0 + F.$$

Här är vänsterledet lika med $0^4 = 0$ och högerledet lika med F, så $F = 0$.

Eftersom vi visat att påståendet är sant för $n = 0$ och att om det är sant för $n = p$ så är det också sant för $n = p + 1$ så gäller, enligt induktionsprincipen, att det är sant för alla heltal $n \geq 0$ med

$$\boxed{A = \frac{1}{5}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{3}, \quad D = 0, \quad E = -\frac{1}{30}, \quad F = 0}.$$

5. a) Definiera begreppen ”kontinuitet” och ”deriverbarhet” (i en punkt) för en funktion av en variabel.

b) Bevisa att kontinuitet är ett nödvändigt men ej tillräckligt villkor för deriverbarhet.

Lösning

a) Se Persson, Böiers, definition 2, sidan 114 (kontinuitet) och definition 1, sidan 149 (deriverbarhet).

b) **Nödvändigt** För att en funktion skall vara deriverbar i en punkt x_0 måste, enligt uppgift a), gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existera i punkten x_0. Detta betyder i sin tur att vi måste kräva att $f(x_0 + h) - f(x_0) \to 0 \Leftrightarrow f(x_0 + h) \to f(x_0)$, då $h \to 0$. Detta är det samma som kravet på att $f(x)$ är kontinuerlig i punkten x_0. Alltså måste funktionen vara kontinuerlig i x_0 för att den skall vara deriverbar där. $\square$

Men ej tillräckligt Betrakta t.ex. funktionen $|x|$ i punkten x_0. Den är kontinuerlig, men däremot inte deriverbar, eftersom, för $h > 0$ har vi

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1 \to 1, \text{ då } h \to 0^+,$$

medan, om $h < 0$,

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1 \to -1, \text{ då } h \to 0^-.$$

Gränsvärdet existerar alltså inte när $h \to 0$ i punkten x_0. Enligt definitionen, se uppgift a), är funktionen alltså *inte* deriverbar i $x_0 = 0$. $\square$