Inledande matematisk analys F, HT 2001 31 augusti 2001

Några övningar på induktionsbevis

I1 Bevisa att för varje positivt heltal n gäller att

a) $2^{2n} - 1$ är delbart med 3

b) $2^{2n-1} + 1$ är delbart med 3

c) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ är delbart med 7

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+\cdots+k} = \frac{2n}{n+1}$

h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2n^2}$

I2 En talföljd definieras av $a_0 = 10,\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 2} + 3$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

a) Visa med induktion att inget tal i följden är mindre än 7.

b) Visa med induktion att följden är avtagande.

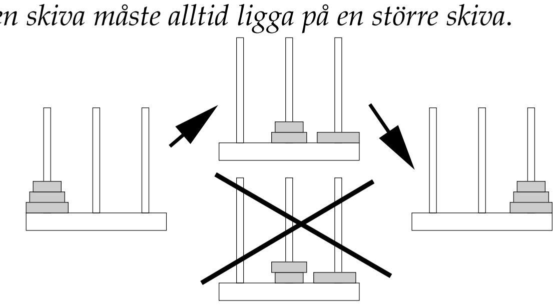
c) Visa att följden är konvergent. Vad konvergerar den mot?

I3 En talföljd definieras av $a_0 = 0,\ a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4}$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

a) Visa med induktion att $a_n \leq 1$ för varje n.

b) Visa med induktion att följden är växande.

I4 **Tornen i Hanoi** är en lek där man har tre pinnar och n stycken olika stora skivor. Leken går ut på att man skall flytta alla skivorna från den vänstra pinnen till den högra. Det finns bara en regel: *en skiva måste alltid ligga på en större skiva*.



Din uppgift är att beräkna, med hjälp av induktion, hur många gånger man behöver flytta skivorna för att klara tornen i Hanoi när antalet skivor från början är n.

I5 Visa, för varje positivt heltal n, att

a) $3^{2n+1} + 5^{2n}$ är delbart med 4 men inte med 8

b) $7^{2n+1} + 17^n$ är delbart med 8

c) $73^n - 7^{2n}$ är delbart med 24

d) $2^{(n^2)} > (n!)^2$, om $n \geq 1$