Inledande problem (F)

Binomialsatsen, induktion

1. Visa att
$$2^{(n^2)} > (n!)^2$$
för alla heltal $n \geq 1$.

2. Visa att
$$1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1) \leq n^n$$
för alla heltal $n \geq 1$.

3. Antag $n \in \mathbf{N}$. Visa att talet $3^{2n+1} + 5^{2n}$ är delbart med 4 men inte med 8.

4. Antag $n \in \mathbf{N}$. Visa att talet $7^{2n+1} + 17^n$ är delbart med 8.

5. Antag $n \in \mathbf{N}$. Visa att talet $73^n - 7^{2n}$ är delbart med 24.

Polynom

6. Antag $a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_m \in \mathbf{R}$. Visa att det finns högst ett polynom $P(x)$ av grad$\leq 2m-1$ sådant att $P(k) = a_k$ och $P'(k) = b_k$, $k = 1, ..., m$.

7. Bestäm $a \in \mathbf{R}$ så att polynomen $x^3 - 2x^2 - x + 2$ och $x^3 + ax - 2$ får en icke-trivial största gemensam delare och angiv denna.

Talföljder

8. Undersök om
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1! + 2! + ... + n!}{n!}$$
existerar och ange i så fall gränsvärdet.

9. En talföljd $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_+}$ uppfyller $a_1 > 0$ och

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{a_n}}, \quad n \in \mathbf{N}_+.$$

Konvergerar eller divergerar talföljden?

10. Antag $n \in \mathbf{N}_+$ och

$$c_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}.$$

Sätt $a_n = nc_n^2$ och $b_n = (n + \frac{1}{2})c_n^2$. Bevisa att talföljden $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_+}$är växande och att talföljden $(b_n)_{n\in\mathbf{N}_+}$ är avtagande. Visa också att talföljderna är konvergenta och att båda har positiva gränsvärden.

11. En talföljd $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_+}$ uppfyller $a_1 > 0$ och

$$a_{n+1} = (a_n^2 + a_n)^{\frac{1}{2}} - a_n, \quad n \in \mathbf{N}_+.$$

Visa att talföljden konvergerar och bestäm gränsvärdet.

12. En talföljd $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_+}$ uppfyller $a_1 = \frac{1}{4}$ och

$$a_{n+1} = -a_n \ln a_n, \quad n \in \mathbf{N}_+.$$

Visa att talföljden konvergerar och bestäm gränsvärdet.

13. Undersök om

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{k+1}}$$

existerar och ange i så fall gränsvärdet.

14. Sök

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{\frac{1}{2}}}$$

där

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+k)^{\frac{1}{2}}}.$$

Visa att likheten

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n} =$$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$$

gäller för alla heltal $n \geq 1$. Beräkna t ex med hjälp härav $\lim_{n\to\infty} a_n$, där

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Derivator

15. Transformera uttrycket

$$\frac{\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}}{(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx})\frac{dy}{dx}}$$

genom att som ny oberoende variabel införa $t = e^x$.

16. Visa att det finns en för alla reella x-värden kontinuerlig funktion $f(x)$, som satisfierar

$$f'(x) = \frac{x^3+1}{\mid x+1 \mid}, \quad x \neq -1.$$

Bestäm en sådan funktion!

17. Sätt $f_1(x) = \arctan x$ och $f_{n+1}(x) = \arctan f_n(x)$ för $n \in \mathbf{N}_+$. Visa att

$$x - \frac{nx^3}{3} < f_n(x) < x \quad \text{för} \quad x > 0.$$

Kurvritning

18. Rita kurvan $y = \frac{1}{x} + \arctan x + \frac{1}{2}\ln x$, där $x > 0$, med angivande av eventuella asymptoter.

19. Rita kurvan $y = \sqrt{\mid x^2+x \mid} + \sqrt{\mid x^2-x \mid}$. Ange särskilt eventuella extremvärden och asymptoter.

Olikheter

20. Visa att $\ln x \leq (\sqrt{ex} - 1)^2$ för $x > 0$.

21. Visa att $x(2+\cos x) > 3\sin x$ för $x > 0$.

22. Visa att
$$xy \le \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}$$
för alla $x > 0$, $y > 0$.

23. Visa att det för alla naturliga tal n gäller att
$$\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}^{\frac{1}{2}} \ge \left\{\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right\}^{\frac{1}{3}}.$$

Integraler

24. Beräkna
$$\min_{0\le a\le 1} \int_0^3 \mid x^2 - 4ax + 3a^2 \mid dx.$$

Båglängd, krökning och area

25. Betrakta kurvan, vars ekvation i rätvinkliga koordinater är $y = x - x^2$. Beräkna båglängden för den del av kurvan, som begränsas av kurvans skärningspunkter med x-axeln.

26. Längden av kurvan $y = \arctan x$, $0 \le x \le a$ betecknas med $s(a)$. Visa att gränsvärdet
$$\lim_{a\to\infty} (s(a) - a)$$
existerar samt att gränsvärdet tillhör intervallet $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

27. Bestäm de punkter på kurvan $y = \frac{1}{\sqrt{7}}x^4$, för vilka krökningen är störst.

28. Betrakta de punkter (x, y) i planet som uppfyller $y \ge \frac{1}{2}$ och $x^2+4y^2 \le 4$. Beräkna arean av detta område.

29. Beräkna längden av kurvan
$$\begin{cases} x = t + \ln t \\ y = t - \ln t, \quad \frac{1}{2} \le t \le 2. \end{cases}$$

SVAR:

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7. $x - 1$ för $a = 1$; $x^2 - x - 2$ för $a = -3$

8. Gränsvärdet existerar och $= 1$

9. Gränsvärdet existerar och $= 1$

10.

11. Gränsvärdet existerar och $= \frac{1}{3}$

12. Gränsvärdet existerar och $= \frac{1}{e}$

13. Gränsvärdet existerar och $= 1$

14. ln2

15.

$$\frac{\frac{d^3y}{dt^3}}{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}}.$$

16. $f(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x, & x \leq -1, \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \frac{11}{3}, & x \geq -1 \end{cases}$

17.

18. $x = 1$ ger $y_{\min} = 1 + \frac{\pi}{4}$; y-axeln är asymptot; utnyttja MATLAB för att rita kurvan

19. $x = 0$ ger $y_{\min} = 0$; $x = \pm 1$ ger $y_{lok\,\min} = \sqrt{2}$; $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ ger $y_{lok\,\max} = \frac{1}{2}(\sqrt{3 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{2\sqrt{3} - 3})$,
    $y = \pm 2x$ är asymptoter; utnyttja MATLAB för att rita kurvan

20.

21.

22.

23.

24. Minimum $= \frac{26}{6}$; detta antages för $a = \frac{3}{4}$

25. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\ln(3 + 2\sqrt{2})$

26.

27. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

28. $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

29. $\frac{\sqrt{10}}{2} + \sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$