

**Matematik Chalmers**  
**TMA970**

**Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2001**

Datum: 2002-08-19, kl. 8.45-12.45.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefon: Rolf Liljendahl, tel. 0740-459022.

OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

=====

1. Avgör om gränsvärdena (a) - (d) finns, resp. om integralerna (e) - (h) konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. finns / finns ej resp. konvergent / divergent. (Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}$ ; (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$ ; (c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{x} + \sin x)$ ; (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin^2 \frac{1}{x}$ ;

(e)  $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2} dx$ ; (f)  $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ ; (g)  $\int_0^\infty \frac{dx}{2x^2+1}$ ; (h)  $\int_0^1 x(\ln x)^2 dx$ .

2. Bestäm gränsvärdena

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$ ; (4p)

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ . (4p)

3. Rita grafen till funktionen  $f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}$ . Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (8p)

4.(a) Bestäm parametern  $a$  så att ekvationen  $\ln x - ax^2 = 0$  har exakt en rot. (4p)

(b) Beräkna  $\int \sqrt{x} \arctan \sqrt{x} dx$ . (4p)

5. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx. \quad (6p)$$

6. Visa att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

är oändligt många gånger deriverbar. (8p)

7.(a) Definiera begreppet kontinuitet för en funktion  $f$  i en punkt  $x_0$ . (1p)

(b) Definiera begreppet deriverbarhet för en funktion  $f$  i en punkt  $x_0$ . (1p)

(c) Vad finns det för samband mellan deriverbarhet och kontinuitet? Stöd dina påståenden med bevis resp. motexempel. Motivera noga! (5p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens huvudsats. (7p)