

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2001

Datum: 2001-10-24, kl. 14.15-18.15.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefon: Per Hörfelt, tel. 0740-459022.

OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

=====

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent. (Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

$$\begin{aligned} \text{(a)} \int_1^\infty \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1} dx; \quad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{x + 1}{x^4 + 1} dx; \quad \text{(c)} \int_1^\infty \frac{x^2 \ln x}{x^4 + 1} dx; \quad \text{(d)} \int_2^\infty \frac{dx}{\ln x}; \\ \text{(e)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad \text{(f)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}; \quad \text{(g)} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}; \quad \text{(h)} \int_0^1 x \ln x dx. \end{aligned}$$

2. Bestäm gränsvärdena

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$; (4p)

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$. (4p)

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (8p)

4.(a) Beräkna $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$. (4p)

(b) Beräkna arean av det begränsade område, som innesluts av kurvorna $y = x$ och $y = x + \sin^2 x$, $0 \leq x \leq \pi$. (4p)

5. Rita grafen till funktionen $\arccos(\cos x)$. (6p)

6. Funktionen f är deriverbar och obegränsad på det begränsade öppna intervallet (a, b) . Visa att f' också är obegränsad på (a, b) . (6p) Ge ett exempel som visar att det omvända inte gäller, d.v.s. ge exempel på en deriverbar begränsad funktion (på ett öppet och begränsat intervall), vars derivata är obegränsad. (1p) Ge också ett exempel som visar att påståendet inte är sant för obegränsade intervall. (1p)

7.(a) Definiera begreppet deriverbarhet för en funktion f i en punkt x_0 . (1p)

(b) Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (inklusive Rolles sats). (7p)

8.(a) Formulera regeln för derivata av en produkt. (1p)

(b) Formulera och bevisa satsen om partiell integration (för obestämda integraler). (5p)