Envariabelanalys - differentialkalkyl

4. Bestäm antalet reella rötter till ekvationen $12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5 = 0$.

5. Funktionen $f(x)$ är två gånger deriverbar i intervallet $[a, \infty)$ och uppfyller $f(a) > 0$, $f'(a) < 0$, $f''(x) \leq 0$ för alla $x \in [a, \infty)$. Visa att f har exakt ett nollställe i intervallet (a, ∞).

3. Givet är parabeln med ekvationen $y = x^2$. Visa att om två tangenter till parabeln är ortogonala så ligger deras skärningspunkt på linjen $y = -\frac{1}{4}$.

4. Bestäm för varje reellt a antalet rötter till ekvationen

$$\sin 2x + 2 \sin x = a \, .$$

5. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan(\tan x) - \tan(\sin x)} \, .$$

4. Låt $f(x) = x^2 - x - \ln x + a$. Bestäm för vilka a funktionen inte har några nollställen.

5. De s.k. Legendrepolynomen definieras som följer

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \, , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \, .$$

Visa att alla nollställen till P_n, $n \geq 1$, är reella och ligger i intervallet $(-1, 1)$.

4. Bestäm alla värden på parametern a sådana att ekvationen

$$x^3 - 3x + a = 0$$

har exakt en reell rot.

5. Låt $P(x)$ vara ett polynom av grad $n > 1$, vars alla nollställen är reella. Visa att även alla nollställen till $P'(x)$ är reella.