Inledande matematisk analys F1, HT 2003

FELAKTIGA LÖSNINGAR

1. Följande "lösningar" demonstrerar några typiska elevfel. Finn felen och lös därefter uppgifterna rätt! Lägg märke till att man ibland kan få rätt svar genom felaktiga resonemang. Tänk på det innan du "prickar av" uppgifter! Tänk också på att uppgiften kanske inte alltid är korrekt formulerad.

(1) Lös ekvationen

$$\frac{a-x}{1-ax}=\frac{1-bx}{b-x}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}(a-x)(b-x)&=(1-ax)(1-bx)\\ ab-ax-bx+x^2&=1-bx-ax+abx^2\\ x^2&=1+abx^2-ab\\ x^2-1&=ab\,(x^2-1)\\ 1&=ab\quad ???\end{aligned}$$

(2) Lös ekvationen

$$(x+1)^2-(x+2)(x+3)=(x+4)(x+5)-(x+6)^2.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}x^2+2x+1-x^2-5x-6&=x^2+9x+20-x^2-12x-36\\ -3x-5&=-3x-16\\ 5&=16\quad ???\end{aligned}$$

(3) Lös ekvationen

$$\frac{6}{x-3}-\frac{9}{x-2}=\frac{1}{x-4}-\frac{4}{x-1}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\frac{6(x-2)-9(x-3)}{(x-2)(x-3)}&=\frac{(x-1)-4(x-4)}{(x-4)(x-1)}\\ \frac{6x-12-9x+27}{x^2-5x+6}&=\frac{x-1-4x+16}{x^2-5x+4}\\ \frac{15-3x}{x^2-5x+6}&=\frac{15-3x}{x^2-5x+4}\\ 6&=4\quad ???\end{aligned}$$

Felaktiga lösningar (forts.)

(4) Lös ekvationen

$$\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x+1}+2\sqrt{6}+1} = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x+1}-2\sqrt{6}+1}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+x} - 2\sqrt{6x} + \sqrt{x} + 4\sqrt{x+1} - 8\sqrt{6} + 4 &= \\ = \sqrt{x^2+x} + 2\sqrt{6x} + \sqrt{x} - 4\sqrt{x+1} - 8\sqrt{6} - 4 & \\ 8\sqrt{x+1} + 8 &= 4\sqrt{6x} \\ 2\sqrt{x+1} &= \sqrt{6x} - 2 \\ 4x + 4 &= 6x + 4 - 4\sqrt{6x} \\ 2\sqrt{6x} &= x \\ 24x &= x^2 \\ x &= 24. \end{aligned}$$

(5) Lös ekvationen

$$\sqrt{x-4} - \frac{3}{\sqrt{x-4}} - \sqrt{x-1} = 0.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} x - 4 - 3 - \sqrt{(x-1)(x-4)} &= 0 \\ x - 7 &= \sqrt{(x-1)(x-4)} \\ x^2 - 14x + 49 &= x^2 - 5x + 4 \\ 9x &= 45 \\ x &= 5. \end{aligned}$$

(6) Bestäm x ur ekvationen

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^7.$$

Lösning: Vi får $3^{x+7} = 4^{x+7}$ varav $3 = 4$. ???

(7) Bestäm x ur ekvationen

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\ln x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\ln x} = \frac{13}{6}.$$

Lösning:

$$
\begin{aligned}
\ln x \ln \frac{2}{3} + \ln x \ln \frac{3}{2} &= \ln \frac{13}{6} \\
\ln x \left(\ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{2} \right) &= \ln \frac{13}{6} \\
\ln x \ln \frac{13}{6} &= \ln \frac{13}{6} \\
\ln x &= 1 \\
x &= e.
\end{aligned}
$$

(8) Beräkna i^{2n}.
Lösning:

$$i^{2n} = (\sqrt{-1})^{2n} = \left((-1)^{\frac{1}{2}}\right)^{2n} = \left((-1)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = (+1)^{\frac{1}{2}} = +1.$$

(9) För vilka reella a och b gäller olikheten

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2 \quad ?$$

Lösning:

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 &> 2ab \\
a^2 - ab &> ab - b^2 \\
a(a-b) &> b(a-b) \\
a &> b.
\end{aligned}
$$

(10) Bestäm arean av en rätvinklig triangel med hypotenusa med längden 8 l.e. och höjd mot hypotenusan med längden 5 l.e.
Lösning: Arean är lika med $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20$ a.e.

(11) En triangel har sidlängderna a, b, c. Uttryck $\sin \alpha$ i termer av a, b, c.
Lösning: Sinusteoremet ger

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Därav följer

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}.$$

och

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \quad \text{varav} \quad \sin\alpha = \frac{ac}{b}.$$

(12) Givet enhetscirkeln, finns det en diameter som skär den i en enda punkt?
Lösning: Ja, ty:
Cirkeln kan skrivas som

$$x = \cos\phi, \quad y = \sin\phi, \quad 0 \le \phi < 2\pi.$$

Sätt nu $t = \tan\frac{\phi}{2}$, då

$$\begin{aligned} x = \cos\phi &= (\cos\frac{\phi}{2})^2 - (\sin\frac{\phi}{2})^2 = \\ &= (\cos\frac{\phi}{2})^2 \left(1 - (\tan\frac{\phi}{2})^2\right) \\ &= \frac{1 - (\tan\frac{\phi}{2})^2}{1 + (\tan\frac{\phi}{2})^2} \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Analogt får vi

$$y = \sin\phi = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Betrakta nu den diameter som ligger på x-axeln; den fås för $y = 0$, alltså för $t = 0$. Men $t = 0$ ger endast $x = 1$, alltså har vi hittat en diameter som skär cirkeln i en enda punkt.

(13) Givet funktionen $f(x) = \ln(2x-5)$, beräkna $f'(1)$.
Lösning:

$$f'(x) = \frac{1}{2x-5} \cdot 2 \quad \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{2-5} = -\frac{2}{3}.$$

(14) Beräkna integralen

$$\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Lösning:

$$\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{1/2}^{1} dx - \int_{1/2}^{1} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} - [\ln x]_{1/2}^{1} = \frac{1}{2} - 0 + \ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

(15) Beräkna integralen

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}.$$

Lösning:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3} = \int_{-1}^{1} x^{-3} dx = -\frac{1}{2}\left[x^{-2}\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}(1-1) = 0.$$

2. I varje grupp av påståenden nedan finns några som i själva verket säger samma sak. Bestäm dessa! Vilka av påståendena är sanna?

(A) (i) När jag inte är hemma är jag på Chalmers.
(ii) När jag är hemma är jag inte på Chalmers.
(iii) När jag inte är på Chalmers är jag hemma.
(iv) När jag är på Chalmers är jag inte hemma.
(v) Jag är alltid på Chalmers eller hemma.

(B) (i) En deriverbar funktion är kontinuerlig.
(ii) En diskontinuerlig funktion är inte deriverbar.
(iii) En kontinuerlig funktion är deriverbar.
(iv) En icke-deriverbar funktion är diskontinuerlig.

(C) (i) En andragradsekvation har högst två olika rötter.
(ii) Om en ekvation endast har två olika rötter så är den en andragradsekvation.
(iii) Om en ekvation har fler än två olika rötter så är den inte en andragradsekvation.

(D) (i) Om summan av siffrorna (i decimalsystem) i ett heltal är delbar med tre så är talet delbart med tre.
(ii) Om summan av siffrorna i ett heltal (i decimalsystem) inte är delbar med tre så är talet inte delbart med tre.
(iii) Om ett heltal är delbart med tre så är summan av dess siffror (i decimalsystem) delbar med tre.
(iv) Om ett heltal inte är delbart med tre så är summan av dess siffror (i decimalsystem) inte delbar med tre.

Jana Madjarova