

**Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2002**

Datum: 2002-10-23, kl. 14.15-18.15.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefon: Rolf Liljendahl, tel. 0740-459022.

OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

=====

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

(a)  $\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^4}{x^3 + 1} dx$ ; (b)  $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{x^2 + 1} dx$ ; (c)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4 - 1}$ ; (d)  $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$ .

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, d.v.s. sant / falskt.

(e) Om funktionen  $f$  är deriverbar i punkten  $x_0$ , så är  $f$  kontinuerlig i  $x_0$ .

(f) Om funktionen  $f$  ej är deriverbar i punkten  $x_0$ , så är  $f$  diskontinuerlig i  $x_0$ .

(g) Om funktionen  $f$  är kontinuerlig på  $[a, b]$ , så är  $f$  begränsad på  $[a, b]$ .

(h) Om funktionen  $f$  är begränsad på  $[a, b]$ , så är  $f$  kontinuerlig på  $[a, b]$ .

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2 \sin^2 x)}{x^2}$ ; (4p)

(b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - \sqrt{x^4 - x^2 + 1})$ . (4p)

3. Rita grafen till funktionen  $f(x) = 6x^{1/3} + 3x^{4/3}$ . Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm alla primitiva funktioner till  $f(x) = \arctan \sqrt{x}$ . (4p)

(b) Beräkna  $\int_0^1 \frac{x-1}{x^3+8} dx$ . (5p)

5. Förklara varför funktionen  $f(x) = |x|$  har en primitiv på  $\mathbb{R}$ . (2p) Finn en primitiv till funktionen  $f(x) = |x|$ . Motivera väl! (5p)

6. Låt funktionen  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  vara kontinuerlig på intervallet  $[0, \infty)$  och deriverbar på  $(0, \infty)$ . Låt dessutom  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . Visa att det finns en punkt  $\xi > 0$  sådan att  $f'(\xi) = 0$ . (Du får använda medelvärdesatsen.) (7p)

7.(a) Definiera begreppet deriverbarhet för en funktion  $f$  i en punkt  $x_0$ . (1p)

(b) Formulera och bevisa satsen om derivatan av en invers funktion. (6p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens (analysens) huvudsats. (7p)