INSTUDERINGSUPPGIFT 3 (tillämpning av derivata)

A) Visa att $f(x)=\sqrt{1-x}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}\right)$ (instuderingsuppgift 2)
är injektiv på $]-\infty,0[$ och injektiv på $]0,\frac{1}{2}]$ och ange V_f.

B) Låt $f(x)=\sqrt{x}\ln\sqrt[3]{x}+\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}+\dfrac{7\sqrt{x}}{3}$ för $x>0$ och $f(0)=0$.

a) Visa att f är kontinuerlig på $[0,\infty[$.

b) Visa att f är injektiv på $[1,\infty[$.

c) Är f injektiv på $]0,1[$?

C) Låt $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & \text{då } x\neq 0 \\ 0, & \text{då } x=0 \end{cases}$.

a) Är f kontinuerlig? Är f deriverbar? Är f' kontinuerlig?

b) Visa att f är injektiv på $[\frac{2}{\pi},\infty[$.

c) Visa att f är strängt konvex på $[\frac{2}{\pi},\infty[$.

d) Låt $g(x)=f(x)$ för $x\in D_g=[\frac{2}{\pi},\infty[$. Beräkna $D(g^{-1})\left(\frac{9}{2\pi^2}\right)$.

Extrauppgifter

5) Visa att $\dfrac{a}{b}<\dfrac{\sin a}{\sin b}$ för $0<a<b<\pi$.

6) Visa att för positiva x gäller: $2^x<x^2 \Leftrightarrow 2<x<4$ (det ger t.ex. $2^e<e^2$).

7) Låt $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$, $D_f=]0,\frac{\pi}{2}[$.
Visa att f är injektiv, bestäm värdemängden V_f och $D(f^{-1})\left(\frac{3}{2\pi}\right)$.

svar: $]0,\frac{2}{\pi}[$, $\frac{2\sqrt{3}\pi^2}{9(\pi-\sqrt{3})}$

8) Låt $f(x)=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ då $x\neq 0$ och $f(0)=0$.
Är f kontinuerlig? Deriverbar? Har f' ett gränsvärde då x går mot 0?
Rita kurvan $y=f(x)$ med angivande av asymptoter och konvexitet/konkavitet.

svar: f är ej kontinuerlig i 0, udda, konvex i $]0,\infty[$, $y=0$ är asymptot, $f'(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-1$.

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 2

a) $D_f=\{x : x\neq 0 \wedge x\leq 1 \wedge 2x\leq 1\}=\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,\tfrac{1}{2}\right]$. Eftersom f är sammansatt av kontinuerliga funktioner så är f kontinuerlig (dvs. kontinuerlig i varje $x\in D_f$!).

b) För att lättare kunna beräkna gränsvärdena skriver vi om f (ändamålsenligt):

$$f(x)=\sqrt{1-x}\left(\sqrt{\tfrac{1}{x^2}-\tfrac{1}{x}}-\sqrt{\tfrac{1}{x^2}-\tfrac{2}{x}}\right)=\frac{\sqrt{1-x}\left(-\frac{1}{x}+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x}}, & \text{då } x>0\\[2ex] \dfrac{\sqrt{1-x}}{-\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x}\right)}, & \text{då } x<0\end{cases}.$$

$\left[\text{obs}: \sqrt{x^2}=-x \text{ då } x<0!\right]$ Detta ger att $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=-\tfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\tfrac{1}{2}$, f saknar alltså gränsvärde då x går mot 0. Vidare är för $x<0$ $f(x)=\dfrac{-1}{1+\sqrt{\frac{1-2x}{1-x}}}=\dfrac{-1}{1+\sqrt{2-\frac{1}{1-x}}}$, det ger att

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{-1}{1+\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$ (linjen $y=1-\sqrt{2}$ är alltså asymptot då $x\to-\infty$).

c) Vi har $g(x)=\dfrac{-1}{1+\sqrt{2+\frac{1}{x-1}}}$; för $x<0$ är $\frac{1}{x-1}$ str. avtagande, alltså är $2+\frac{1}{x-1}$ och $1+\sqrt{2+\frac{1}{x-1}}$ str. avtagande, detta visar att g är str. avtagande och därmed injektiv. Vidare är $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1-\sqrt{2}$, $\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=-\tfrac{1}{2}$, g är kontinuerlig, s.o.m.v. ger då att $\underline{V_g=\left]-\tfrac{1}{2},1-\sqrt{2}\right[}$

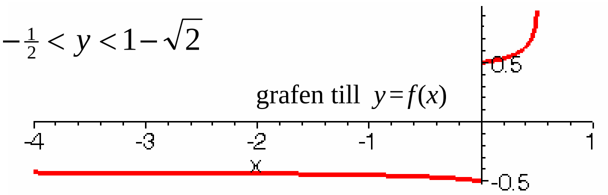
[obs: $1-\sqrt{2}>-\tfrac{1}{2}\Leftrightarrow 3>2\sqrt{2}\Leftrightarrow 9>8$]. Beräkning av g^{-1}: för $y\in V_g$ gäller

$$y=g(x)\Leftrightarrow \tfrac{-1}{y}=1+\sqrt{2+\tfrac{1}{x-1}}\Leftrightarrow -\tfrac{1+y}{y}=\sqrt{2+\tfrac{1}{x-1}}\underset{\text{ty } y\in V_g}{\Leftrightarrow}\tfrac{1+y^2+2y}{y^2}=2+\tfrac{1}{x-1}\Leftrightarrow\tfrac{1}{x-1}=\tfrac{1+2y-y^2}{y^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1=\tfrac{y^2}{1+2y-y^2}\Leftrightarrow x=\underline{\tfrac{1+2y}{1+2y-y^2}=g^{-1}(y)}.$$ ANM: vi kan nu ange V_g även så här:

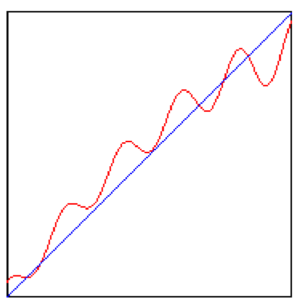
$$x<0\Leftrightarrow \tfrac{1+2y}{1+2y-y^2}<0\Leftrightarrow\tfrac{-2\left(y+\frac{1}{2}\right)}{(y-1)^2-2}<0\Leftrightarrow\tfrac{2\left(y+\frac{1}{2}\right)}{\left(y-1-\sqrt{2}\right)\left(y-1+\sqrt{2}\right)}>0\Leftrightarrow-\tfrac{1}{2}<y<1-\sqrt{2}$$

(gör teckentabell!).



Lösningsförslag till extrauppgift 3

Åskådligt är det klart: eftersom f är kontinuerlig och $0\leq f(x)\leq 1$ så borde väl kurvan $y=f(x)$ någonstans korsa linjen $y=x$. Ett strängt bevis för det får vi t.ex. så här: om $f(0)=0$ eller $f(1)=1$ så är vi färdiga (0 eller 1 är då fixpunkt); om $f(0)\neq 0$ och $f(1)\neq 1$ så gäller för funktionen $g(x)=f(x)-x$: g är kontinuerlig på $[0,1]$, $g(0)>0$ och $g(1)<0$, värdet 0 ligger mellan värdena $g(0)$ och $g(1)$, enligt satsen om mellanliggande värden finns det då ett $x_0\in[0,1]$ (i själva verket $x_0\in\left]0,1\right[$) där g antar värdet 0, dvs. $f(x_0)=x_0$.



vsv