INSTUDERINGSUPPGIFT 4 (integral)

Det är "räkna ut uppgifter", du får inte lösningar utan bara svar. Räkna dem, samtliga var tentamensuppgifter.

A) Beräkna den effektiva strömstyrkan i_1^2 definierad av $i_1^2 \equiv \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} i(t)^2\,dt$

för en växelström $i(t) = i_0 \cos \omega t$ med vinkelfrekvens ω .

B) Beräkna $\int_{-8}^{8} \frac{\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{|x|}}{1+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

C) Bestäm primitiva funktioner till $\frac{1}{\sqrt{x + x\sqrt{x}}}$ resp. $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$.

D) Låt $f(x) = \tanh\left(\frac{x}{2}\right)$. Visa att $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{\sinh x}{1+\cosh x}$, beräkna $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

och bestäm den primitiva funktion F till f som satisfierar $F(0) = \ln 2$.

E) Beräkna $\int_0^{\infty} \frac{\cosh(x) - x\sinh(x)}{(\cosh(x))^2}\,dx$.

F) Är $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\left(x + e^{-x}\right)}\,dx$ konvergent eller divergent?

<u>**svar**</u>: **A)** $\frac{i_0}{\sqrt{2}}$ **B)** $12 - 3\ln 5$ **C)** $4\sqrt{1+\sqrt{x}}$ resp. $2\ln\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} + \sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$

D) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm 1,\ F(x) = \ln(1+\cosh x)$ **E)** 2 **F)** konvergent

Extrauppgifter

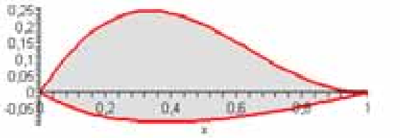
Följande uppgifter har varit tentamensuppgifter (utom 9b):

9. Funktionen f definieras på följande sätt:
$D_f =]0,\infty[$, $f(1) = 0$ och för $1 \neq a \in D_f$ är $f(a)$ areamåttet av det område i xy-planet som begränsas av kurvorna $y = ae^{|x|}$ och $y = e^{a|x|}$.

a) Visa att $f(a) = f\left(\frac{1}{a}\right)$ för $a \in D_f$.

b) Beräkna $f(x)$ och rita kurvan $y = f(x)$ $\left(x \in D_f\right)$.

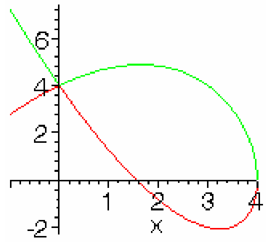
c) Visa att $f(4)$ inte är ett rationellt tal.



10. Låt $f(x) = x + \dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\sin\frac{\pi x}{2} + 1} - 1$ och $g(x) = \sin\frac{\pi x}{2} - \left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2$.

a) Visa att $f(x) < 0$ för $0 < x < 1$.

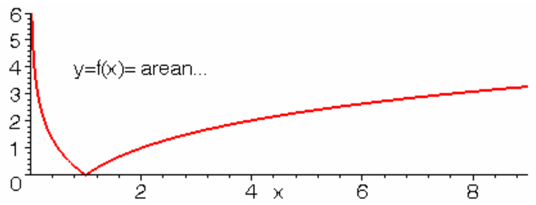
b) Beräkna arean av området mellan kurvorna $y = f(x)$ och $y = g(x)$, $0 \le x \le 1$.



11. Beräkna arean av området innanför den ögla som definieras genom $y^2 = (4 - x)(x^2 + x + 2y - 4)$.

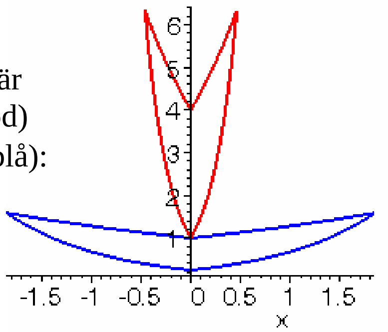
<u>**svar**</u>:

9b) $f(x) = 2\,\mathrm{sgn}(x-1)\left(x^{\frac{x}{x-1}} + \frac{1}{x} - x - x^{\frac{1}{x-1}}\right), 0 < x \neq 1$



10) $\frac{2(1-\ln 2)}{\pi}$ **11)** $\frac{256}{15}$

Området i **9a**) ser ut så här för $a = 4$ (övre, röd) och för $a = \frac{1}{4}$ (undre, blå):



REPETITIONSFRÅGOR inl. matem. analys för F1, 05

Moment 3: integral

1. Vad är en primitiv funktion till f? Kan du motivera varför en kontinuerlig funktion har en primitiv funktion (hur "konstruerar" man en primitiv funktion)?

2. Vad är $\int f(x)\,dx$ resp. $\int_a^b f(x)\,dx$? Kan du visa att $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$, oberoende av vilken primitiv funktion F till f man väljer?

3. Hur definieras funktionerna $\ln(x)$ och $\exp(x)$?
Kan du visa logaritmlagarna och räknelagarna för exponentialfunktionen?

4. Hur lyder formlerna för variabelsubstitution och för partiell integration?

5. Kan du partialbråksuppdela rationella funktioner?

6. Vad är en Riemann-summa?

7. Är summan/produkten av två jämna funktioner jämn? Av udda funktioner? Av en udda och en jämn funktion?

8. Kan du (formulera och bevisa) integralkalkylens medelvärdessats?

9. Hur definieras (konvergent/divergent) generaliserad integral?

10. Kan du (formulera och bevisa) jämförelsesatsen för generaliserade integraler?

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 3

A) Vi hade $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+\sqrt{2+\frac{1}{x-1}}}, & \text{då } x>0 \\ \dfrac{-1}{1+\sqrt{2+\frac{1}{x-1}}}, & \text{då } x<0 \end{cases}$ (se lösning till instud. uppg. 2), detta ger derivatan

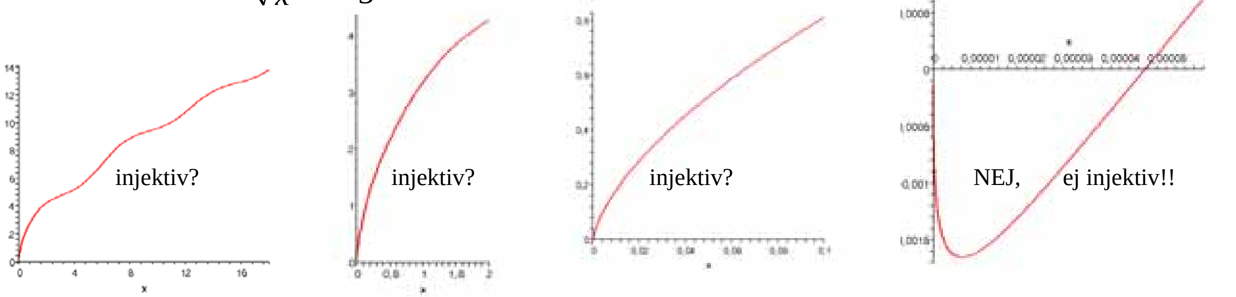
$f'(x)=\operatorname{sgn}(x)\cdot\dfrac{-1}{\left(1+\sqrt{2+\frac{1}{x-1}}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2+\frac{1}{x-1}}}\cdot\dfrac{-1}{(x-1)^2}$, alltså är $f'(x)<0$ för $x<0$ och $f'(x)>0$ för $0<x<\frac{1}{2}$, det ger att f är str. avtagande i $]-\infty,0[$ och str. växande och därmed injektiv i vartdera intervall. Det största värde som f antar i $]0,\frac{1}{2}]$ är alltså $f(\frac{1}{2})=1$ och eftersom $\lim_{x\to 0+} f(x)=\frac{1}{2}$ (instud. uppg. 2) och f är kontinuerlig på $]0,\frac{1}{2}]$, så ger s.o.m.v. att f antar där alla värden mellan $\frac{1}{2}$ och 1, analogt ger $\lim_{x\to 0-} f(x)=-\frac{1}{2}$ och $\lim_{x\to -\infty} f(x)=1-\sqrt{2}$ att f antar i $]-\infty,0[$ alla värden mellan $-\frac{1}{2}$ och $1-\sqrt{2}$ (se V_g i instud. uppg. 2), alltså är $\underline{V_f=\left]-\tfrac{1}{2},1-\sqrt{2}\right[\cup\left]\tfrac{1}{2},1\right]}$.

B) $f(x)=\sqrt{x}\ln\sqrt[3]{x}+\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}+\dfrac{7\sqrt{x}}{3}$ är kontinuerlig i varje punkt $x>0$, ty f är sammansatt av funktioner som är kontinuerliga i $]0,\infty[$; f är kontinuerlig även i 0, ty

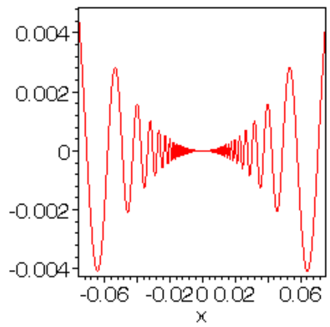
$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{3}\sqrt{x}\ln x+\sqrt{x}\,\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{7}{3}\sqrt{x}\right)=\frac{1}{3}\cdot 0+0\cdot 1+0=f(0)$ (standardgränsvärden och kontinuitet av $\sqrt{\ }$). Vidare är för $x>1$ $f'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)+\dfrac{\sqrt{x}\cos x-\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}}{x}+\frac{7}{6\sqrt{x}}=$

$=\dfrac{x\ln x+2x+6x\cos x-3\sin x+7x}{6x\sqrt{x}}=\dfrac{x\ln x+6x(1+\cos x)+3(x-\sin x)}{6x\sqrt{x}}>0$ ty varje summand i täljaren är >0. Alltså är f strängt växande i $]1,\infty[$ och därmed injektiv på $[1,\infty[$. Till sist: $f'\to-\infty$ då $x\to 0+$, det finns alltså ett $\delta>0$ så att $f'(x)<-1$ för alla $x\in\,]0,\delta[$; f är alltså strängt avtagande i $[0,\delta]$, och därmed $f(\delta)<f(\frac{\delta}{2})<0$. Men f är kontinuerlig på $[\delta,1]$ och $f(1)>0$, s.o.m.v. ger då att f antar värdet $f(\frac{\delta}{2})$ även i någon punkt $x_0\in[\delta,1]$, alltså är f ej injektiv i $]0,1[$ ($f(\frac{\delta}{2})=f(x_0)$, $\frac{\delta}{2}\neq x_0$). Grafen till

$f(x)=\sqrt{x}\ln\sqrt[3]{x}+\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}+\dfrac{7\sqrt{x}}{3}$ visar hur lätt man kan bli vilseledd av figurer:



C) **a)** f är deriverbar och därmed kontinuerlig i varje punkt $x \neq 0$ och $f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$ är kontinuerlig i varje punkt $x \neq 0$ ty f och f' är sammansatta av deriverbara funktioner för $x \neq 0$ ($\cos(x), \frac{1}{x}, \sin(x) \ldots$). Då undersöker vi om f är deriverbar i 0, d.v.s. om $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ har ett gränsvärde då Δx går mot 0:



$$0 \le \left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \left|\frac{x^2\cos\frac{1}{x} - 0}{x}\right| = |x\cos\tfrac{1}{x}| \le |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

instängningslagen ger då att $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$ existerar, d.v.s. att f är deriverbar i 0 med $f'(0) = 0$. Därmed är f även kontinuerlig i 0 (visa detta även direkt). Men f' saknar gränsvärde då x går mot 0, ty $f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} 2x\cos\frac{1}{x} = 0$ och $\sin\frac{1}{x}$ saknar gränsvärde då x går mot 0, eftersom $\sin\frac{1}{x}$ antar i varje intervall $]-\delta,\delta[$ alla värden mellan –1 och 1, $f'(x)$ kan alltså inte gå mot ett gränsvärde då x går mot 0.

b) För $x > \frac{2}{\pi}$ är $f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} > 0$ ($0 < \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}$), f är alltså strängt växande och därmed injektiv på $[\frac{2}{\pi}, \infty[$ (slutet intervall, ty f är kontinuerlig).

c) $f''(x) = 2\cos\frac{1}{x} + \frac{2}{x}\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} > 0$ ty $f''(\frac{2}{\pi}) = \pi, \lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 2$ och för $x > \frac{2}{\pi}$ är $f'''(x) = -\frac{1}{x^4}\sin\frac{1}{x} < 0$, dvs f'' är str. avt. $\Rightarrow f''(x) > 2 \Rightarrow f$ strängt konvex på $[\frac{2}{\pi}, \infty[$.

d) g är injektiv (ty f är), $Dg^{-1}\left(\frac{9}{2\pi^2}\right) = \dfrac{1}{Dg(a)}$ där $g(a) = a^2\cos\frac{1}{a} = \frac{9}{2\pi^2}$; försök med $a = \frac{3}{\pi}$: bingo ($\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$), alltså är svaret: $Dg^{-1}\left(\frac{9}{2\pi^2}\right) = \dfrac{1}{Df\left(\frac{3}{\pi}\right)} = \dfrac{1}{\frac{2\cdot 3}{\pi}\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{\frac{3}{\pi} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \underline{\dfrac{2\pi}{6 + \sqrt{3}\pi}}$.

En tentamensuppgift:

Låt $f(x) = x\arctan\frac{1}{x} + \ln\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$, $D_f =]0, \infty[$.

a) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av konvexitet/konkavitet och asymptoter; ange även V_f. (6p)

b) Ange en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten $\left(1, \frac{\pi + \ln 4}{4}\right)$. (2p)

c) Visa att f är injektiv och beräkna $Df^{-1}\left(\frac{\pi + \ln 4}{4}\right)$. (4p)

d) Bestäm den primitiva funktion F till f som satisfierar $F(1) = \frac{\pi + \ln 4}{4}$. (6p)

svar:

a) f är strängt konvex, asymptoter är $x = 0$ och $y = 1$, $V_f =]1, \infty[$, **b)** $(\pi - 4)x - 4y = -4 - \ln 4$

c) $\frac{4}{\pi - 4}$ **d)** $F(x) = \frac{1}{2}\left(x^2\arctan\frac{1}{x} + \arctan x + x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + x - 1\right)$

grafen: