Tentamen i inledande matematisk analys för F1 (tma970), 06-01-10

uppg. 1

$f(x) = x^{\arctan x} = e^{\arctan x \ln x} = e^{\frac{\arctan x}{x}(x \ln x)} \underset{x\to 0+}{\longrightarrow} e^{1\cdot 0} = 1$ (standardgränsvärden och e^x är kontinuerlig) och $f'(x) = e^{\arctan x \ln x}\left(\frac{\arctan x}{x} + \frac{\ln x}{1+x^2}\right)$, alltså är $f'(1) = e^0\left(\frac{\pi}{4}+0\right) = \frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\underline{\textbf{svar}}\textbf{:a)}\ Df(1) = \tfrac{\pi}{4},\ \textbf{b)} \lim_{x\to 0+} f(x) = 1}$$

uppg. 2

$f(x) = x + \cos x \implies f'(x) = 1 - \sin x > 0$ i alla intervall $\left]\frac{(4n+1)\pi}{2}, \frac{(4n+5)\pi}{2}\right[$, $n \in \mathbb{Z}$, alltså är f strängt växande i alla dessa intervall och därmed strängt växande, och således injektiv, på hela $\mathbb{R}$. $f(0) = 1$, alltså är $Df^{-1}(1) = \frac{1}{Df(0)} = 1$. Vidare är $x_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ $[n \in \mathbb{Z}]$ lok. extrempunkter av f' alltså inflexionspunkter av f $(f''(x_n) = -\cos x_n = 0$, f" byter tecken i $x_n)$.

$$\boxed{\underline{\textbf{svar}}:\ Df^{-1}(1) = 1,\ \ \tfrac{(2n+1)\pi}{2}\ [n \in \mathbb{Z}] \text{ är infexionspunkter}}$$

upp. 3

Områdena har arean $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan\frac{1}{2}$ resp. $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{8} \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan 8 - \arctan\frac{3}{2}$.

Vi skall nu visa att $\arctan\frac{1}{2} = \arctan 8 - \arctan\frac{3}{2}$, dvs $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{3}{2} = \arctan 8$: sätt $\alpha = \arctan\frac{1}{2}$, $\beta = \arctan\frac{3}{2}$, då är $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ och $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}} = \frac{8}{1}$, det ger $\alpha + \beta = \arctan 8 + n\pi$; men eftersom $0 < \alpha + \beta < \pi$ så är $n = 0$ vsv.

upp. 4

Längden är $\displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+\sinh^2(x)}dx$ = [jämn integrand]

$\displaystyle = 2\int_0^a \cosh x dx = 2\sinh a \overset{!}{=} 2 \implies e^a - e^{-a} = 2 \implies (e^a)^2 - 2e^a - 1 =$

$(e^a-1)^2-2=0 \implies e^a=1+\sqrt{2}$ $\left[1-\sqrt{2}<0\text{, alltså ej lösning}\right]$
$\implies a=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

$$\boxed{\underline{\textbf{svar}}\text{: } a=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

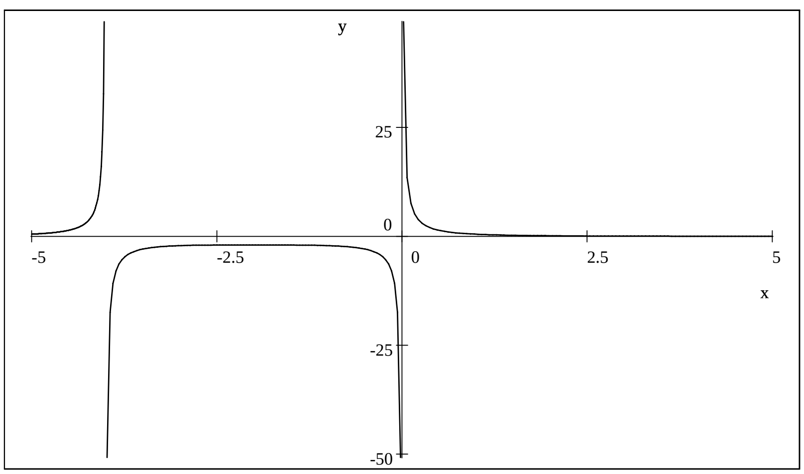
upp. 5

a) $(x+2)^4=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}x^{4-k}2^k=x^4+4x^3\cdot 2+6x^2\cdot 4+4x\cdot 8+16=$
$\underline{x^4+8x^3+24x^2+32x+16}$.

b) $\frac{32}{(x+2)^4-16}=\frac{32}{\left((x+2)^2+4\right)\cdot\left((x+2)^2-4\right)}=4\left(\frac{1}{(x+2)^2-4}-\frac{1}{(x+2)^2+4}\right)=$
$=4\left(\frac{1}{(x+2+2)(x+2-2)}-\frac{1}{(x+2)^2+4}\right)=\underline{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}-\frac{4}{(x+2)^2+4}}$.

c) Man ser direkt (eller på partialbråksuppdelningen) att $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0,-4\}$, $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$, $f(x)\to\infty$ då $x\to 0+$, $x\to -4-$ och $f(x)\to-\infty$ då $x\to 0-$, $x\to-4+$, dvs $y=0$, $x=-4$ och $x=0$ är asymptoter. $f'(x)=32\frac{-4(x+2)^3}{\left((x+2)^4-16\right)^2}\begin{cases}>0, & \text{då } x<-2\\ <0, & \text{då } x>-2\end{cases}$, $f(-2)=-2$ är alltså ett strängt lokalt maximum (globala max-min och sneda asymptoter saknas).

$$\boxed{\underline{\textbf{svar}}\text{: asymptoter: } y=0,\ x=-4,\ x=0\text{; lok. max. i } (-2,-2)}$$



d) $\int_1^\infty \frac{32}{(x+2)^4-16}dx$ är konvergent, ty för $x\geq 1$ är enligt a)

$0 \le \frac{32}{(x+2)^4-16} = \frac{32}{x^4+8x^3+24x^2+32x} < \frac{32}{x^4}$ och $\int\limits_1^\infty \frac{32}{x^4}dx$ är konvergent.

Beräkning: enligt b) är $\int\limits_1^\infty \frac{32}{(x+2)^4-16}dx = \int\limits_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} - \frac{1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}\right) dx =$

$= \left[\ln x - \ln(x+4) - 2\arctan\frac{x+2}{2}\right]_1^\infty =$

$= \lim\limits_{N\to\infty}\left(\ln\frac{N}{N+4} - 2\arctan\frac{N+2}{2}\right) - \left(-\ln 5 - 2\arctan\frac{3}{2}\right) = \underline{-\pi + \ln 5 + 2\arctan\frac{3}{2}}$

$\left(\lim\limits_{N\to\infty}\left(\ln\frac{N}{N+4}\right) = \lim\limits_{N\to\infty}\left(\ln\frac{1}{1+\frac{4}{N}}\right) = \ln 1 = 0\right).$