Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2002
Datum: 2003-01-14, kl. 14.15-18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Rolf Liljendahl, tel. 0740-459022.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$\textbf{(a)}\ \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}};\quad \textbf{(b)}\ \int_0^1 x\ln x\,dx;\quad \textbf{(c)}\ \int_0^\infty \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x^4+1}};\quad \textbf{(d)}\ \int_1^\infty \frac{dx}{x\ln x+1}.$$

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, d.v.s. sant / falskt.

(e) Om funktionerna f, g är deriverbara på I och $f > g$ på I, så gäller $f' \geq g'$ på I.

(f) Funktionen $\ln|1-\sqrt{x}|$ är deriverbar i sin definitionsmängd.

(g) Om funktionen f är udda på $[-a, a]$, så är dess derivata f' jämn på $[-a, a]$.

(h) Om f:s derivata f' är jämn på $[-a, a]$, så är funktionen f udda på $[-a, a]$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (utan att använda l'Hospitals regel)

$$\textbf{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}\quad (3p);\qquad \textbf{(b)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}\quad (5p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = \frac{\sin x}{1+\sin x}$. (5p)

(b) Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas när det begränsade området mellan kurvorna $x = y^2$ och $8y = x^2$ roterar kring x-axeln. (4p)

5.(a) Visa att funktionen $\cos\frac{1}{x}$ saknar gränsvärde när $x \to 0$. (3p)

(b) Visa att funktionen $x\cos\frac{1}{x}$ har gränsvärde när $x \to 0$. (3p)

6.(a) Visa att integralen $\int_0^1 x^k \ln^n x\,dx$ är konvergent $\forall k, n \in \mathbb{N}$. (2p)

(b) Visa att $\int_0^1 x^k \ln^n x\,dx = \frac{(-1)^n n!}{(k+1)^{n+1}}$ $\forall k, n \in \mathbb{N}$. (6p)

7.(a) Visa att derivatan av $\sin x$ är $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$. (4p)

(b) Härled derivatan av $\arcsin x$. (3p)

8. Formulera och bevisa intervallinkapslingssatsen. (7p)

/JM