

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1

Datum: 2003-08-18, kl. 8.45-12.45.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefon: Elin Götmark, tel. 0740-459022.

OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

=====

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

(a) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^7} dx$; (b) $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$; (c) $\int_2^\infty \frac{dx}{(\ln x)^4}$; (d) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$;
(e) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; (f) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$; (g) $\int_0^1 \frac{dx}{2x^2+x}$; (h) $\int_0^1 x^3 \ln x dx$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (utan att använda l'Hospitals regel)

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + x}}{2x - \sqrt{x^2 + x}}$; (4p)

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x \sin 2x}$. (5p)

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \frac{\sin 2x}{2 + \sin x - \cos^2 x}$. (6p)

(b) Beräkna $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. (4p)

5. Beräkna längden av kurvbågen $y = \ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$. (6p)

6. Funktionen $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ och grafen till f ligger i vinkeln mellan de räta linjerna $y = kx$ och $y = -kx$ ($0 < k < \infty$) för alla x i intervallet $(0, \epsilon)$. Visa att $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)} = 1$. (6p)

7.(a) Definiera begreppet deriverbar funktion (i en punkt). (1p)

(b) Visa att om en funktion är deriverbar i en punkt, så är den kontinuerlig i samma punkt. Ge exempel som visar att det omvända förhållandet inte är sant. Motivera nog! (6p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats (valfri variant). (7p)