Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2003
Datum: 2003-10-22, kl. 14.15-18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Mats Kjaer, tel. 0740-459022.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

(a) $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x+1}\,dx$; **(b)** $\int_1^\infty \frac{dx}{\ln(x^2)+1}$; **(c)** $\int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{dx}{8x^3-1}$; **(d)** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Avgör om funktionerna nedan är deriverbara i $x_0 = 0$. Ge endast svar, d.v.s. deriverbar / ej deriverbar.
(e) $f(x) = |x| + 1$;
(f) $f(x) = x|x| + 1$;
(g) $f(x) = \ln|x|$;
(h) $f(x) = |x|^3 + 1$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos 2x}$; (4p)

(b) $\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^6+x^3+1} - \sqrt{x^6-x^3+1})$. (4p)

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (8p)

4.(a) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$. (4p)

(b) Beräkna $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos 2x\,dx$. (4p)

5. Visa att ekvationen $x - a\sin x = 5$, där $0 < a < 1$, har en enda reell rot. (6p)

6. Givet är att funktionen f är deriverbar i intervallet (a, ∞) och sådan att $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Visa att $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. (OBS! Du får inte använda L'Hospitals regel!) (6p) Ge exempel på en funktion g sådan att g är deriverbar, $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$, men för vilken $\lim_{x\to\infty} g'(x)$ inte existerar. (1p)

7.(a) Definiera begreppet deriverbarhet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)
(b) Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (inklusive Rolles sats). (7p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (7p)