Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2003
Datum: 2004-01-13, kl. 14.15-18.15.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Axel Målqvist, tel. 0740-459022.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$\textbf{(a)}\ \int_0^\infty \frac{\ln x}{x+1}\,dx; \quad \textbf{(b)}\ \int_2^\infty \frac{dx}{x\ln(x^2)}; \quad \textbf{(c)}\ \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}; \quad \textbf{(d)}\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}.$$

Avgör om gränsvärdena nedan finns. Ge endast svar, d.v.s. finns / finns ej.

(e) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2-1}\right)^{2x^2+1}$;
(f) $\lim_{x\to-\infty} \sin x$;
(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin^2 x+x^2)}{1-\cos x}$;
(h) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger −1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (l'Hospitals regel får inte användas)

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{1-\cos 2x}$; (3p)

(b) $\lim_{x\to\infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x})$. (5p)

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = (x^2-1)^{\frac{2}{3}}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (8p)

4.(a) Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = \ln(x^2+x+1)$. (4p)

(b) Beräkna $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$. (4p)

5. Beräkna längden av kurvan som ges av $y^2 = x^3,\ x \in [0,4]$. (7p)

6. Givet är att funktionen f är två gånger deriverbar i $\mathbb{R}$ samt att $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$. Visa att $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. (7p)

7.(a) Definiera begreppet kontinuitet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)

(b) Definiera begreppet deriverbarhet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)

(c) Visa att om en funktion är deriverbar i en punkt, så är den kontinuerlig i samma punkt. Är det omvända påståendet sant? Motivera! (5p)

8. Formulera och bevisa integralkalkylens (analysens, Newton-Leibniz) huvudsats. (7p)