Matematik Chalmers
TMA970

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F1, HT 2003
Datum: 2004-08-16, kl. 8.45-12.45.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefon: Mikael Persson, tel. 0739-779268, Jonas Hartwig, tel. 0762-186654.
OBS! Personnummer skall anges på skrivningsomslaget.
==

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$\textbf{(a)} \int_1^\infty \frac{dx}{\ln x + 1}; \quad \textbf{(b)} \int_1^\infty \frac{dx}{e^{2\ln x} + 1}; \quad \textbf{(c)} \int_1^\infty \frac{dx}{(x-1)^p}; \quad \textbf{(d)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Avgör om följderna nedan konvergerar eller divergerar när $n \to \infty$. Ge endast svar, d.v.s. konvergerar / divergerar.
(e) $\{a_n\}_{n=1}^\infty,\ a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$;
(f) $\{a_n\}_{n=1}^\infty,\ a_n = \frac{\cos n}{n}$;
(g) $\{a_n\}_{n=1}^\infty,\ a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$;
(h) $\{a_n\}_{n=1}^\infty,\ a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel får ej användas)

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$; (4p)

(b) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x$. (4p)

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2})\, e^{-x}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (8p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$. (4p)

(b) Beräkna $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 2x \, dx$. (4p)

5. Visa att $\frac{x-1}{\sqrt{x}} > \ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$ för alla $x > 1$. (6p)

6. Givet är den kontinuerliga funktionen $f : [a,b] \to [a,b]$. Visa att ekvationen $x = f(x)$ har åtminstone en rot i intervallet $[a,b]$. (6p)

7.(a) Definiera begreppet kontinuitet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)
(b) Definiera begreppet deriverbarhet för en funktion f i en punkt x_0. (1p)
(c) Visa att om en funktion är deriverbar i en punkt, så är den kontinuerlig i sammma punkt. Är det omvända påståendet sant? Motivera! (5p)

8.(a) Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (7p)
(b) Finn $\lim_{n\to\infty} \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} \sin(x^2)\, dx$. (2p)