Här är några typiska tentatal för inledande matematisk analys F1.

De demonstreras (delvis) må 9/1-06, räkna dem hemma, **skriv ner** en lösning!!
Facit finns på baksidan.

1. Hur många lösningar har ekvationen $\tan x - \cot x = 2x$ i intervallet $]0, \frac{\pi}{2}[$?
[Eller: Visa att $f(x) = \tan x - \cot x - 2x$ är injektiv och beräkna $Df^{-1}(-\frac{\pi}{2})$]. (6p)

2. Det kommer tre teorifrågor på tentan som väljs ur en lista med sju frågor.
Hur många tentor kan man göra innan samma tre teorifrågor kommer igen? (4p)

3. **a)** Rita funktionskurvan $y = x - e\ln(x)$ med angivande av extrempunkter och konvexitet/konkavitet. (4p)

b) Visa att $e^x > x^e$ för alla $x \in]0, \infty[\setminus \{e\}$
och beräkna arean av området $\{(x, y) : 0 \le x \le e, 0 \le y \le e^x - x^e\}$. (4p)

c) Visa att funktionen $h(x) = x^2 + 2ex(1 - \ln x)$ är injektiv och beräkna
$Dh^{-1}(e^{-2} + 4)$. ledn: lös först a) och utnyttja det för b) och c). (4p)

4. Låt $f(x) = \dfrac{1}{2\sin x + \sin 2x}$.

a) Rita funktionskurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter.
ledn: det räcker att studera funktionen i intervallet $]0, \pi[$, varför? (6p)

b) Bestäm den primitiva funktion till f i intervallet $]0, \pi[$ som går genom punkten $]\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}[$. (6p)

5. Givet är $F(0) = 0$ och $F'(x) = \text{arctanh}(x)$ för $|x| < 1$.

a) Bestäm $F(x)$ för $|x| < 1$, $\lim_{x \to -1+} F(x)$ och $\lim_{x \to 1-} F(x)$. (7p)

b) Visa att $\tan(x) < \text{arctanh}(x) < \tan(\frac{\pi}{2}x)$ för $0 < x < 1$. [$\text{arctanh}(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$] (7p)

6. Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter och asymptoter då
$f(4) = f(0) = 0$, $f(-5) = \ln\frac{3}{2}$ och $f'(x) = \dfrac{x^2 - 8x - 2}{x^4 + x^3 + 2x - 4}$ för $x \in I\!R \sim \{-2, 1\}$. (8p)

SVAR:

1. 1 [eller $\frac{1}{2}$]

2. 35

3. a) $(e,0)$ str. minimipunkt, y-axeln är asymptot, kurvan är str. konvex

b) arean är $\frac{e^e - e - 1}{e+1}$

c) $\frac{e}{2(1+2e^2)}$

4. a) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ger lokala extrempunkter (extremvärden $\pm\frac{2\sqrt{3}}{9}$)

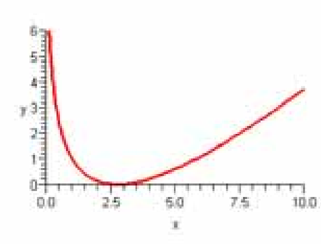
b) $\frac{1}{4}\left(\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + \frac{1}{1+\cos x} + 1\right)$

5. a) $(1+x)\ln\sqrt{1+x} + (1-x)\ln\sqrt{1-x}$, $\lim\limits_{x\to -1+} F(x) = \ln 2 = \lim\limits_{x\to 1-} F(x)$

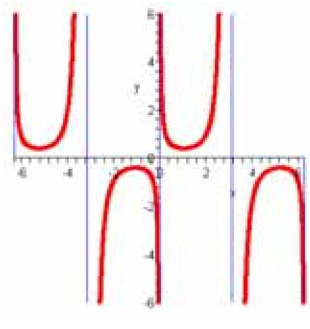
6. $f(x) = \ln\frac{x^2+2}{|x^2+x-2|}$, $x = 4 - 3\sqrt{2}$ ger lok. min., $x = 4 + 3\sqrt{2}$ ger lok. max., $x = -2$, $x = 1$ och x-axeln är asymptoter

Graferna:

uppg. 3: $y = x - e\ln(x)$



uppg. 4: $y = \dfrac{1}{2\sin x + \sin 2x}$



uppg. 6: $y = \ln\frac{x^2+2}{|x^2+x-2|}$