

## Här är några typiska tentatal för inledande matematisk analys F1.

Räkna dem hemma, **skriv ner** en lösning!! Facit finns på baksidan.

1. Hur många lösningar har ekvationen  $\tan x - \cot x = 2x$  i intervallet  $]0, \frac{\pi}{2}[$  ?  
 [Eller: Visa att  $f(x) = \tan x - \cot x - 2x$  är injektiv och beräkna  $Df^{-1}(-\frac{\pi}{2})$ ]. (6p)
  
2. Det kommer tre teorifrågor på tentan som väljs ur en lista med sju frågor.  
 Hur många tentor kan man göra innan samma tre teorifrågor kommer igen? (4p)
  
3. a) Rita funktionskurvan  $y = x - e \ln(x)$  med angivande av extrempunkter och konvexitet/konkavitet. (4p)  
 b) Visa att  $e^x > x^e$  för alla  $x \in ]0, \infty[ \setminus \{e\}$   
 och beräkna arean av området  $\{(x, y) : 0 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq e^x - x^e\}$ . (4p)  
 c) Visa att funktionen  $h(x) = x^2 + 2ex(1 - \ln x)$  är injektiv och beräkna  $Dh^{-1}(e^{-2} + 4)$ . ledn: lös först a) och utnyttja det för b) och c). (4p)
  
4. Låt  $f(x) = \frac{1}{2 \sin x + \sin 2x}$ .  
 a) Rita funktionskurvan  $y = f(x)$  med angivande av extrempunkter.  
 ledn: det räcker att studera funktionen i intervallet  $]0, \pi[$ , varför? (6p)  
 b) Bestäm den primitiva funktion till  $f$  i intervallet  $]0, \pi[$  som går genom punkten  $]\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}[$ . (6p)
  
5. Givet är  $D_f = ]0, 1[$ ,  $F(0) = 0$  och  $F'(x) = \operatorname{arctanh}(x)$ .  
 a) Bestäm  $F(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^+} F(x)$  och  $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$ . (Rita!) (7p)  
 b) Visa att  $\tan(x) < \operatorname{arctanh}(x) < \tan(\frac{\pi}{2}x)$  för  $0 < x < 1$ . [ $\operatorname{arctanh}(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ] (7p)
  
6. Rita kurvan  $y = f(x)$  med angivande av extrempunkter och asymptoter då  
 $f(4) = f(0) = 0$ ,  $f(-5) = \ln \frac{3}{2}$  och  $f'(x) = \frac{x^2 - 8x - 2}{x^4 + x^3 + 2x - 4}$  för  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ . (8p)

## SVAR:

1. 1 [eller  $\frac{1}{2}$ ]

2. 35

3. a)  $(e,0)$  str. minimipunkt,  $y$ -axeln är asymptot, kurvan är str. konvex

b) arean är  $\frac{e^e - e - 1}{e + 1}$

c)  $\frac{e}{2(1+e^2)}$

4. a)  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ger lokala extrempunkter (extremvärden  $\pm \frac{2\sqrt{3}}{9}$ )

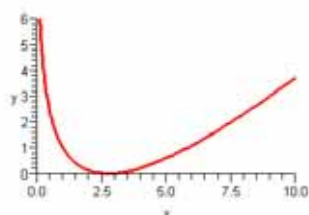
b)  $\frac{1}{4} \left( \ln \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + \frac{1}{1+\cos x} + 1 \right)$

5. a)  $(1+x)\ln\sqrt{1+x} + (1-x)\ln\sqrt{1-x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^+} F(x) = \ln 2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$

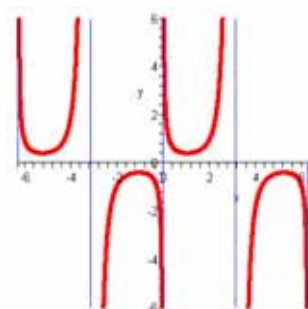
6.  $f(x) = \ln \frac{x^2+2}{|x^2+x-2|}$ ,  $x = 4 - 3\sqrt{2}$  ger lok. min.,  $x = 4 + 3\sqrt{2}$  ger lok. max.,  
 $x = -2$ ,  $x = 1$  och  $x$ -axeln är asymptoter

## Graferna:

uppg. 3:  $y = x - e \ln(x)$



uppg. 4:  $y = \frac{1}{2 \sin x + \sin 2x}$



uppg. 6:  $y = \ln \frac{x^2+2}{|x^2+x-2|}$

