Övningstenta i inledande matematisk analys för F1 (tma970), 06-09-23

uppg. 1

Visa att $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} kx^k = \frac{Nx^{N+2}-(N+1)x^{N+1}+x}{(1-x)^2}$ för alla $N \in \mathbb{N}$ $(x \neq 1)$.

Vi gör ett induktionsbevis:

I. $N = 1:$ $VL = x,$ $HL = \frac{x^3-2x^2+x}{(1-x)^2} = \frac{x(1-x)^2}{(1-x)^2} = x = VL$ vsv.

II. Föruts.: $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} kx^k = \frac{Nx^{N+2}-(N+1)x^{N+1}+x}{(1-x)^2}$ gäller t.o.m. något $m_0 \geq 1$.

Påst.: $\displaystyle\sum_{k=0}^{m_0+1} kx^k = \frac{(m_0+1)x^{m_0+3}-(m_0+2)x^{m_0+2}+x}{(1-x)^2}$.

Bevis: $\displaystyle\sum_{k=0}^{m_0+1} kx^k = \sum_{k=0}^{m_0} kx^k + (m_0+1)\,x^{m_0+1} = \text{[enl.föruts.]} =$

$$= \frac{m_0x^{m_0+2}-(m_0+1)x^{m_0+1}+x}{(1-x)^2} + (m_0+1)\,x^{m_0+1} =$$

$$= \frac{m_0x^{m_0+2}-(m_0+1)x^{m_0+1}+x+(m_0+1)x^{m_0+1}(1-x)^2}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{m_0x^{m_0+2}-(m_0+1)x^{m_0+1}+x+(m_0+1)\left(x^{m_0+3}-2x^{m_0+2}+x^{m_0+1}\right)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{(m_0+1)x^{m_0+3}-(m_0+2)x^{m_0+2}+x}{(1-x)^2} \quad \text{vsv.}$$

III. Induktionsaxiomet ger då att $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} kx^k = \frac{Nx^{N+2}-(N+1)x^{N+1}+x}{(1-x)^2}$ gäller för alla $N \in \mathbb{N}$. vsv

uppg. 2

a) $f(x) = \frac{\sqrt{|x^4-1|}}{x^2+1} = \frac{\sqrt{x^2+1}\sqrt{|x^2-1|}}{x^2+1} = \frac{\sqrt{|x^2-1|}}{\sqrt{x^2+1}}$ är deriverbar i varje punkt $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (ty sammansatt av deriverbara funktioner); vi undersöker differenskvoten i punkten $a = 1$ för $x > 1$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}} - 0}{x-1} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x-1}} \longrightarrow \infty \text{ då } x \longrightarrow 1+$$

(ty $\sqrt{x-1} \longrightarrow 0+$), differenskvoten saknar alltså gränsvärde då x går mot 1 högerifrån, dvs. f är inte deriverbar i 1.
Eftersom f är jämn $(f(-x) = f(x))$ så gäller sak samma i -1.

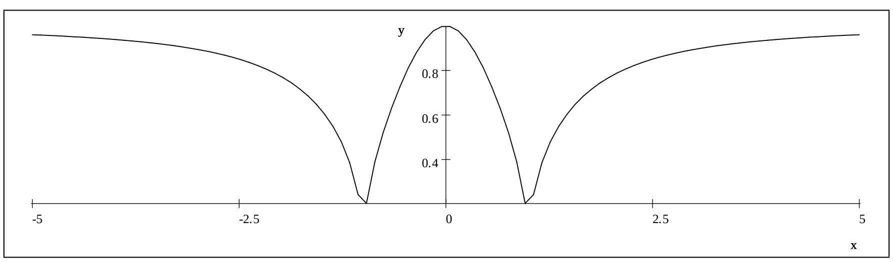
b) $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{\frac{x^2+1-2}{x^2+1}} = \sqrt{1 - \frac{2}{1+x^2}}$ är strängt växande
(ty $1+x^2$ är strängt växande, alltså $\frac{1}{1+x^2}$ strängt avtagande, alltså $1-\frac{2}{1+x^2}$ strängt växande och därmed $\sqrt{1-\frac{2}{1+x^2}}$ strängt växande;
det inses lätt även direkt: $1 \leq a < b \Longrightarrow \frac{2}{1+b^2} < \frac{2}{1+a^2} \Longrightarrow$

$1-\frac{2}{1+a^2}<1-\frac{2}{1+b^2} \Longrightarrow g(a)<g(b)$, alltså är g injektiv.
Beräkning av g^{-1}: Vi bestämmer först $D_{g^{-1}}=V_g$: $g(1)=0$,
$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{2}{1+x^2}} \underset{\sqrt{\ }\text{ är kontinuerlig}}{=} \sqrt{1-0}=1 \underset{\text{s.o.m.v.}}{\Longrightarrow} [0,1[\,=V_g$
(g är kontinuerlig!). Nu löser vi ekvationen $y=g(x)$ för $y\in V_g$:
$y=\sqrt{1-\frac{2}{1+x^2}} \underset{y\geq 0}{\Longleftrightarrow} y^2=1-\frac{2}{1+x^2} \Longleftrightarrow \frac{2}{1+x^2}=1-y^2 \Longleftrightarrow 1+x^2=\frac{2}{1-y^2}$
$\Longleftrightarrow x^2=\frac{1+y^2}{1-y^2} \underset{x\geq 1}{\Longleftrightarrow} x=\sqrt{\frac{1+y^2}{1-y^2}}=g^{-1}(y)$.

c) På $[1,\infty[$ är $f(x)=g(x)$, alltså $[0,1[\,=V_g\subseteq V_f$; för $0\leq x\leq 1$ är $f=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{\frac{-x^2-1+2}{x^2+1}}=\sqrt{\frac{2}{1+x^2}-1}$, det visar att f är strängt avtagande i $[0,1]$ (samma argument som ovan för g), det största respektive det minsta värde som f antar i $[0,1]$ är alltså $f(0)=1$ respektive $f(1)=0$, s.o.m.v. ger då (f är kontinuerlig!) $[0,1]\subseteq V_f$. Eftersom f är jämn så tillkommer inga nya värden i $]-\infty,0]$, alltså är $V_f=[0,1]$.

<u>**svar**</u>: **a)** inte i ± 1 **b)** $g^{-1}(y)=\sqrt{\frac{1+y^2}{1-y^2}}$, $0\leq y<1$ **c)** $V_f=[0,1]$

Grafen till $y=\frac{\sqrt{|x^4-1|}}{x^2+1}$:



upp. 3
Nonsens är
d): vi har definierat "injektiv" på ett intervall (det krävs ju minst 2 punkter!)
f): "deriverbar i $[a,b]$" innebär ju "deriverbar i <u>varje</u> punkt $x_0\in[a,b]$", och då måste x_0 vara inre punkt i $[a,b]$, men a <u>och</u> b är inte inre punkter!