INSTUDERINGSUPPGIFT 2 (funktioner, gränsvärde) (lösn)

Låt $f(x)=\sqrt{1-x}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}\right)$.

a) Bestäm D_f. Är f kontinuerlig?

b) Beräkna $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Har f ett gränsvärde då x går mot 0?

c) Låt g vara restriktionen av f på $]-\infty,0[$ (g definieras genom $D_g=]-\infty,0[$ och $g(x)=f(x)$ för $x\in D_g$). Visa att g är injektiv och ange g^{-1}.

[injektiviteten visar du enklare nästa vecka m.h.a. derivatan].

Extrauppgifter

1) Visa entydigheten av gränsvärdet: $\left(\lim_{x\to a} f(x)=A \wedge \lim_{x\to a} f(x)=B\right)\Rightarrow (A=B)$.

2) Låt P_1, P_2 vara två punkter i planet.
Beräkna $\lim_{x\to\infty}\left| d(P_1,(x,0))-d(P_2,(x,0))\right|$ och tolka svaret.
$d(P,Q)$ är avståndet ("distans") mellan punkterna P och Q.

3) (lösn) Visa fixpunktsatsen:
Om $f:[0,1]\to[0,1]$ är kontinuerlig med $D_f=[0,1]$ så finns det en punkt $x_0\in[0,1]$ så att $f(x_0)=x_0$ (en sådan punkt kallas *fixpunkt* till f).

4) Emil och Emilia har gjort en smörgås: en rund brödskiva med schweizerost på (den där med många hål). Kan de dela mackan med ett rakt snitt så att bägge får lika mycket bröd och lika mycket ost?
(svar: teoretiskt ja, visa det! I praktiken nej (visa inte det)).

DUGGA

Lördag 23 september ges en **övningstenta**, tid: kl. 8.30-10.30, plats: VV.

Den är en viktig del av inlärningen. Du får kontroll på hur bra du redan behärskar stoffet och, mycket viktigt även det, hur bra du kan skriva ner dina lösningar.

En övningstenta är en ”halv tenta”: den består av tre problemuppgifter och en teorifråga som tillsammans kan ge 30p, skrivningstiden är 2 timmar.

För varje 7p på denna tenta får du 1 bonuspoäng på ordinarie tentan 25/10.

Stoff:
Förutom moment från förberedande kursen (kvadratkomplettering, visa olikheter, räkna korrekt med potenser) innehåller övningstentan (induktions-) bevis, potensfunktioner, gränsvärde, monotoni, injektivitet, kontinuitet och deriverbarhet av reellvärda funktioner av en reell variabel.

REPETITIONSFRÅGOR inl. matem. analys för F1, 06

Moment 2: gränsvärde, kontinuitet, deriverbarhet, elementära funktioner

1. Kan du skriva upp definitionerna för $\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a+} f(x) = A$,
$\lim_{x\to a-} f(x) = A,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = A,\ f(x) \to \pm\infty$ då $x \to a\ \ (a\pm,\ \pm\infty)$?

2. Vilka "gränsvärdesregler" användes i exempel 32 sid. 82 i kursboken?

3. Kan du bevisa gränsvärdesreglarna?

4. Vad är en kontinuerlig funktion? Varför är kontinuitet en så viktig egenskap?

5. Vad är en deriverbar funktion? Är en kontinuerlig funktion deriverbar?
Är en deriverbar funktion kontinuerlig?

6. Stämmer påståendet: $\lim_{x\to a+} f'(x) = \lim_{x\to a-} f'(x) \Rightarrow f$ är deriverbar i a ?

7. Kan du (formulera och bevisa) deriveringsreglerna?

8. Vad ger $f'(a)$? Kan du skriva upp en ekvation för tangenten?

9. Kan du derivera f^{-1} (under vilka förutsättningar?) och visa din formel?

10. Vad är lokala extrempunkter (lokala maxima/minima)?
Hur kan du eventuellt hitta dem m.h.a. derivatan?

11. Vad är en stationär punkt? Är stationära punkter (lokala) extrempunkter?

12. Kan du (formulera, bevisa) Lagranges sats (differentialkalkylens medelvärdessats)?
Vilka tillämpningar har Lagranges sats?

13. Vad menas med att en funktion är konvex/konkav? Vad är en inflexionspunkt?
Hur kan du eventuellt m.h.a. derivatan avgöra om en funktion är växande/avtagande, resp. konvex/konkav? Är en strängt konvex funktion injektiv? Deriverbar?
Är inflexionspunkter lokala extrempunkter?

14. Hur definieras funktionerna
$\ln x,\ e^x,\ x^a,\ \sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \sinh x,\ \cosh x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\ \arctan x,\ \theta(x)$?
Kan du visa att dessa funktioner är kontinuerliga/deriverbara och härleda derivatorna till dem?

15. Kan du (även visa) standardgränsvärdena
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x},\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x},\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x},\ \lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\ \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x},\ \lim_{x\to 0+} x\ln x,\ \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$?