

**Övningskrivning i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2005-09-17**  
**kl. 8.30-10.30 i V**

**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa

**Telefon:** Bernhard Behrens, tel. 0768-681630

**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.  
 Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. Betrakta påståendet  $P(n): \sum_{k=3}^n \ln\left(\frac{k(k+1)}{(k-1)(k-2)}\right) = \ln(n^4 - n^2)$ .

a) Visa att om  $P(n_0)$  är sant för något  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $n_0 \geq 3$ , så är även  $P(n_0 + 1)$  sant. (3p)

b) Är  $P(n)$  sant för alla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ ? (t.ex.: gäller  $P(2005)$ ?).

Om inte, hitta den korrekta formeln för  $\sum_{k=3}^n \ln\left(\frac{k(k+1)}{(k-1)(k-2)}\right) = ?$  och visa att den gäller

för alla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$  (och därmed att  $P(2005)$  är falskt). (3p)

2. Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definieras genom

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{|x|}-1} \quad \text{för } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \quad \text{och} \quad f(-1) = A, f(1) = B.$$

Kan  $A$  resp.  $B$  väljas så att  $f$  blir kontinuerlig i  $-1$  resp. i  $1$ ? (4p)

3. Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definieras genom  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x-2}}$ .

a) Motivera (utan att använda derivata) varför  $f$  är injektiv och bestäm  $f^{-1}$  (glöm ej att ange  $D_f$  och  $D_{f^{-1}}$ ). (7p)

b) Beräkna  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \sqrt{x-2})$ . (4p)

4. a) Låt  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ .

Visa att om  $f$  är strängt monoton på  $[a, b]$  så är  $f$  injektiv på  $[a, b]$ . (2p)

b) Visa att  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ . (4p)

c) Visa att  $\sqrt{3}$  inte är ett rationellt tal. (3p)

7p – 13p: 1 bonuspoäng, 14p – 20p: 2 bonuspoäng, 21p – 27p: 3 bonuspoäng, 28p – 30p: 4 bonuspoäng

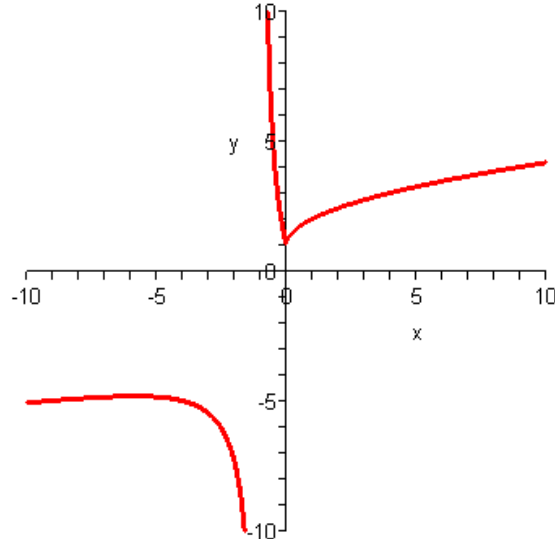
BB

svar på baksidan

## SVAR

1. Den korrekta formeln är  $\sum_{k=3}^n \ln\left(\frac{k(k+1)}{(k-1)(k-2)}\right) = \ln(n^4 - n^2) - \ln 12$

2. Nej (med  $B = 2$  blir  $f$  kontinuerlig i 1, men  $A$  kan ej väljas så att  $f$  blir kontinuerlig i  $-1$ )



3. a)  $D_f = [1, \infty[$ ,  $V_f = D_{f^{-1}} = [0, \infty[$ ,  $f^{-1}(y) = \frac{5}{2} + y^2 - \sqrt{\frac{9}{4} + y^2}$  ( $y \geq 0$ )

b)  $\frac{1}{2}$

