

Tentamensskrivning i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2005-10-19
kl. 14.00-18.00 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa, **Telefon:** Elin Götmark, tel. 0762-721860

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
 Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

=====

1. Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar på \mathbb{R} ; bevisa eller motbevisa (genom att ge ett motexempel) **a)** f är jämn $\Rightarrow f'$ är udda, **b)** f är udda $\Rightarrow f'$ är jämn,
c) f' är jämn $\Rightarrow f$ är udda, **d)** f' är udda $\Rightarrow f$ är jämn. (6p)

2. Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x}$ (L'Hospitals regel får ej användas). (4p)

3. Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieras genom

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|} - 1}{x - 1} \quad \text{för } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad \text{och} \quad f(1) = \frac{1}{2}.$$

- a)** Bevisa att f är kontinuerlig. I vilka punkter är f deriverbar? (5p)
b) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter och asymptoter. (6p)
c) Bestäm den primitiva funktion F till f som satisfierar $F(0) = 0$. (7p)

4. Låt $f(x) = \arcsin(e^{-x})$.

- a)** Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av D_f , extrempunkter, konvexitet/konkavitet och asymptoter. Motivera även varför f är injektiv. (6p)
b) Beräkna längden av kurvbågen $y = f(x)$, $0 \leq x \leq \ln 3$. (6p)

5. Bevisa att om $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig på $[a, b]$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

$$f(x) \geq 0 \quad \text{för } x \in [a, b] \quad \text{och} \quad f(x_0) > 0 \quad \text{för en punkt } x_0 \in [a, b] \quad \text{så är} \quad \int_a^b f(x) dx > 0. \quad (5p)$$

6. **a)** Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara deriverbar på $]a, b[$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Visa att f är växande på $]a, b[$ om och endast om $f'(x) \geq 0$ för varje $x \in]a, b[$. (6p)

- b)** Visa att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (du får använda att $\cos(x)$ är kontinuerlig). (5p)

- c)** Definiera funktionen $\arctan x$ och härled dess derivata. (4p)

Betygsgränser:

24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

BB