

Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2006-10-25, kl. 14.00-18.00 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Elizabet Wulkan, tel. 0762 – 721860

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

=====

1. Är $\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ resp. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ konvergent eller divergent? Motiver väl! (4p)

2. Given är kurvan $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (\cosh t, \sinh t, t), 0 \leq t \leq a \quad (a > 0)$.
 - a) Beräkna längden av kurvan. (5p)
 - b) Till vilken punkt kommer du om du går 2 längdenheter längs kurvan C från $(1,0,0)$? (3p)

3. Låt $f(x) = x((\ln x)^2 - \ln(x^2) + 2), D_f =]0, \infty[$.
 - a) Visa att f är injektiv och beräkna $Df^{-1}(e)$. (6p)
 - b) Var är f konvex resp. konkav? (2p)
 - c) Beräkna arean av området $\{(x, y) : 0 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq f(x)\}$. (6p)

4. a) Visa att $\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2) < \frac{1}{x^2}$ för $x > 1$. (5p)
 - b) Är $\int_0^\infty (\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2)) dx$ konvergent eller divergent? (2p)

5. Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ges av $f(0) = 1$ och $f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$ för $0 \neq x \in \mathbb{R}$.
 - a) Visa att f är jämn och kontinuerlig. (4p)
 - b) Beräkna $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} x}{x - \frac{\pi}{2}}$. (4p)
 - c) Är f deriverbar i $\frac{\pi}{2}$? (4p)

6. a) Formulera och bevisa regeln för derivatan av en summa av två funktioner. (6p)
 - b) Definiera $\binom{n}{m}$ ($m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$). (2p)

7. Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (Lagranges sats). (7p)