Tentamen inledande matematisk analys för F1 (tma970), 06-10-25

uppg. 1

För $0 < x \leq 1$ är $\sin x \leq x$, alltså $0 \leq \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ konvergent

$\underset{\text{jämförelsekrit.}}{\Longrightarrow} \int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$ konvergent.

För $1 \leq x$ är $|\sin x| \leq 1$, alltså $0 \leq \left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{x\sqrt{x}}$, $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ konvergent

$\underset{\text{jämförelsekrit.}}{\Longrightarrow} \int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right| dx$ konvergent $\Longrightarrow \int_1^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$ konvergent.

svar: båda är konvergenta (alltså är $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$ konvergent)

uppg. 2

a) $\boldsymbol{r}(t) = (\cosh t, \sinh t, t) \Longrightarrow \boldsymbol{r}'(t) = (\sinh t, \cosh t, 1)$, alltså är kurvans längd

$$L = \int_0^a |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt = \int_0^a \sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t + 1}dt = \int_0^a \sqrt{2\cosh^2 t}dt =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^a \cosh t dt = \sqrt{2}\sinh a \qquad \left[\cosh^2 - \sinh^2 = 1\right].$$

b) $L = \sqrt{2}\sinh a = 2 \Longleftrightarrow e^a - e^{-a} = 2\sqrt{2} \Longleftrightarrow e^{2a} - 2\sqrt{2}e^a = 1$
$\Longleftrightarrow \left(e^a - \sqrt{2}\right)^2 = 3 \Longrightarrow e^a = \sqrt{2} + \sqrt{3} \Longrightarrow a = \ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$;
punkten vi kommer till är $\boldsymbol{r}(a) = \left(\cosh a, \sinh a, \ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right) =$
$= \left(\sqrt{1 + \left(\sqrt{2}\right)^2}, \sqrt{2}, \ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right) = \left(\sqrt{3}, \sqrt{2}, \ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right)$.

svar: **a)** $\ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$ **b)** $\left(\sqrt{3}, \sqrt{2}, \ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\right)$

uppg. 3

$f(x) = x\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right) \quad (x > 0)$

$\Longrightarrow f'(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x + 2 + x\left(\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x}\right) = (\ln x)^2.$

a) $f'(x) > 0$ för alla $0 < x \neq 1$, eftersom f är kontinuerlig så ger det att f är strängt växande på $]0,1]$ och på $[1,\infty[$ och därmed injektiv på hela $]0,\infty[$.
$Df^{-1}(e) = \frac{1}{Df(a)}$ där $f(a) = a\left((\ln a)^2 - 2\ln a + 2\right) = e$, vi "ser" $a = e$ $(\ln e = 1)$, alltså är $Df^{-1}(e) = \frac{1}{(\ln e)^2} = 1$.

b) $f''(x) = \dfrac{2\ln x}{x}\begin{cases} < 0 & \text{då } x < 1 \\ > 0 & \text{då } x > 1 \end{cases}$, dvs. f är strängt konkav i $]0,1]$ och strängt konvex i $[1,\infty[$ (1 är inflexionspunkt).

c) $\displaystyle\int x\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right) dx =$[p.i.]

$= \frac{x^2}{2}\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right) - \displaystyle\int \frac{x^2}{2}\left(\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x}\right) dx =$

$= \frac{x^2}{2}\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right) - \displaystyle\int (x\ln x - x)\, dx =$[p.i.]

$= \frac{x^2}{2}\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right) - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} + c.$

En primitiv funktion till f är alltså $F(x) = \frac{x^2}{2}\left((\ln x)^2 - 3\ln x + \frac{7}{2}\right)$.

$f(x) > 0$ för $x > 0$ ty $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$ (standard) och f str. växande, alltså är arean $A = \int\limits_0^e f(x)\, dx = [F(x)]_0^e = F(e) - \lim\limits_{x\to 0+} F(x) =$

$= \frac{e^2}{2}\left(1 - 3 + \frac{7}{2}\right) - 0 = \frac{3e^2}{4} \quad \left(\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = 0\right).$

$\boxed{\textbf{svar: a) } Df^{-1}(e) = 1 \quad \textbf{b) } f \text{ str. konkav i }]0,1], \text{ str. konvex i } [1,\infty[\quad \textbf{c) } \frac{3e^2}{4}}$

uppg. 4

a) För $x \geq 1$ gäller $\frac{1}{x^2} < \tan\frac{1}{x^2}$ (ty $0 < \frac{1}{x^2} < \frac{\pi}{2}$), det ger
$\arctan\frac{1}{x^2} = \operatorname{arccot} x^2 = \frac{\pi}{2} - \arctan x^2 < \frac{1}{x^2}$ (arctan är str. växande).
Eller sätt $f(x) = \frac{1}{x^2} + \arctan\left(x^2\right) - \frac{\pi}{2}$, då är för $x > 1$
$f'(x) = \frac{-2}{x^3} + \frac{2x}{1+x^4} = \frac{-2}{x^3(1+x^4)} < 0$, dvs. f är str. avtagande;
eftersom $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$ så är $f(x) > 0$ för $x > 1$ vsv.

b) Eftersom $0 < \frac{\pi}{2} - \arctan\left(x^2\right) < \frac{1}{x^2}$ för $x \geq 1$ och $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ konvergerar, så konvergerar även $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(x^2\right)\right) dx$ (jämförelsekriterium),

$$\int_0^1 \left(\tfrac{\pi}{2} - \arctan\left(x^2\right)\right) dx$$ existerar (ej generaliserad), alltså

$$\boxed{\textbf{svar:} \int_0^\infty \left(\tfrac{\pi}{2} - \arctan\left(x^2\right)\right) dx \text{ är konvergent.}}$$

uppg. 5

$f(0) = 1$ och $f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$.

a) f är jämn ty $f(-x) = \frac{\sqrt{1-\sin x}-\sqrt{1+\sin x}}{-x} = f(x)$; f är kontinuerlig i varje punkt $x \neq 0$ ty f är sammansatt av kontinuerliga funktioner ($|\sin x| \leq 1$); f är kontinuerlig även i 0 ty $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin x}{x\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)} =$

$= \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = 1 = f(0)$ $\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,\ \sqrt{x} \text{ är kontinuerlig}\right)$.

b) Sätt $g(x) = \sqrt{1+\sin x} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x$: g är deriverbar i $\frac{\pi}{2}$, alltså är

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{g(x) - g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = g'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{1+\sin\frac{\pi}{2}}} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

c) Vi skall undersöka om $\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$ har ett gränsvärde då x går mot $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x}{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x}{x-\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{1-\sin x}}{x-\frac{\pi}{2}}\right);$$ nu är för $0 < x < \pi$

$$\frac{\sqrt{1-\sin x}}{x-\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{1+\sin x}} = \begin{cases} \frac{\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{1+\sin x}} & \text{då } x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{-\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{1+\sin x}} & \text{då } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Eftersom $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{1+\sin x}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{1+\sin x}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ så är (med b))

$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-2\sqrt{2}}{\pi} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-2\sqrt{2}}{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, dvs.

$\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$ saknar gränsvärde då x går mot $\frac{\pi}{2}$, f är alltså ej deriverbar i $\frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\textbf{svar: b) } \tfrac{-2\sqrt{2}}{\pi} \quad \textbf{c) } \text{nej}}$$