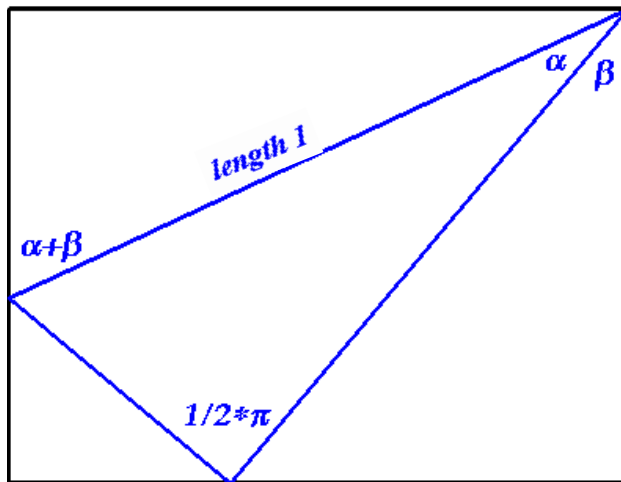


ADDITIONSTEOREMET FÖR SINUS OCH COSINUS

Additionsteoremet för sinus och cosinus lyder:

$$\begin{aligned}\sin(u + v) &= \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v) \\ \cos(u + v) &= \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)\end{aligned}\quad \text{för godtyckliga reella tal } u, v.$$

Bevisa dessa regler för $u = \alpha > 0, v = \beta > 0, \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ med hjälp av följande figur:



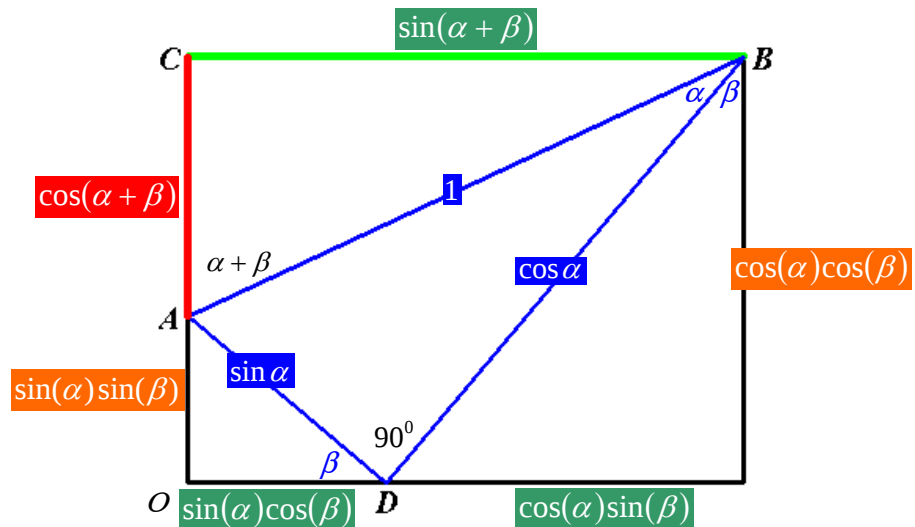
Bevisa sedan reglerna för godtyckliga u, v .

LÖSNING

För $u = \alpha > 0, v = \beta > 0, \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$:

Upptäck att vinkeln $ODA = \beta$ och skriv in längderna på alla kanter

($\cos = \frac{\text{närkatet}}{\text{hypotenusa}}, \sin = \frac{\text{motkatet}}{\text{hypotenusa}}$):



För andra u, v använd räknereglerna

$$\sin(0) = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi), \cos(\pi) = -1, \sin(\pi - \omega) = \sin(\omega), \cos(\pi - \omega) = -\cos \omega,$$

$$\sin(\omega + 2k\pi) = \sin(\omega), \cos(\omega + 2k\pi) = \cos(\omega) \quad (k \text{ heltal}),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha), \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha) \quad \text{och} \quad \sin(-\omega) = -\sin(\omega), \cos(-\omega) = \cos(\omega).$$