

Tentamen inledande matematisk analys för F1 (tma970), 08-08-21

uppg.1

a) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x(\ln x)^2} = e^0$ ty $\sqrt{x} \ln x \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0+$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{(x^{\ln x})} = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x^{\ln x} \ln x} = 0$
ty $\ln x \rightarrow -\infty$ och $x^{\ln x} = e^{(\ln x)^2} \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0+$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0+} (-\ln x)^x = \lim_{t=\frac{1}{x} \rightarrow \infty} (\ln t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln(\ln t)}{t}} = e^0$

ty $\frac{\ln(\ln t)}{t} = \frac{\ln t}{t} \cdot \frac{\ln(\ln t)}{\ln t} \rightarrow 0 \cdot 0$ då $t \rightarrow \infty$.

svar: a) 1 b) 0 c) 1

uppg. 2

$$f(x) = \frac{x \sinh x - \cosh x}{(\cosh x)^2}.$$

a) f är jämn och nämnaren > 0 , vi betraktar alltså bara $x \geq 0$ och täljaren $g(x) = x \sinh x - \cosh x$: $g(1) = \frac{1}{2}(e^1 - e^{-1} - e^1 - e^{-1}) = -e^{-1} < 0$,
 $g(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\left(e^{\frac{3}{2}} - e^{-\frac{3}{2}}\right) - e^{\frac{3}{2}} - e^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{3}{2}} - 5e^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{4}(e^3 - 5) > 0$
ty $e^3 > 2^3 > 5$. Eftersom g är kontinuerlig så ger s.o.m.v. att det finns minst ett $x_0 \in [1, \frac{3}{2}]$ där $g(x_0) = 0 (= f(x_0))$, i själva verket är $x_0 \in]1, \frac{3}{2}[$. Vidare är g strängt växande och därmed injektiv på $]0, \infty[$ ty $g'(x) = x \cosh x > 0$ för $x > 0$, g antar alltså värdet 0 högst en gång. Det visar att f har precis ett nollställe i $[0, \infty[$ ($f < 0$ i $[0, x_0[$, $f > 0$ i $]x_0, \infty[$) och ett i $]-\infty, 0]$ (f jämn).

b) För $x \geq 0$ är $0 \leq |f(x)| \leq \frac{x \sinh x + \cosh x}{(\cosh x)^2} = \frac{2x(e^x - e^{-x})}{e^{2x} + e^{-2x} + 2} + \frac{2}{e^x + e^{-x}} \leq \frac{4e^{\frac{3}{2}x}}{e^{2x}} + \frac{2}{e^x}$
 $\left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} < e^{\frac{x}{2}} : e^t \geq t + 1 > t \text{ ty } e^t \text{ är konvex eller ty } h(t) = e^t - t \geq h(0) = 1 : \\ h'(t) = e^t - 1 > 0 \text{ för } t > 0 \text{ ger att } h \text{ är strängt växande på } [0, \infty[\end{array} \right],$
 $\int_0^\infty \left(\frac{4e^{\frac{3}{2}x}}{e^{2x}} + \frac{2}{e^x} \right) dx$ är konvergent $[= [-8e^{-\frac{x}{2}} - 2e^{-x}]_0^\infty = 10]$,
alltså är $\int_0^\infty |f(x)| dx$ och därmed $\int_0^\infty f(x) dx$ konvergent.

c) $\int \frac{1}{\cosh x} dx = [\text{part. int.}] = x \frac{1}{\cosh x} + \int \frac{x \sinh x}{(\cosh x)^2} dx$, alltså är
 $\int_0^\infty \frac{x \sinh x - \cosh x}{(\cosh x)^2} dx = \left[-\frac{x}{\cosh x} \right]_0^\infty = 0 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\cosh x} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{e^x} \cdot \frac{2}{1 + e^{-2x}} \right) = 0.$

svar: a) 2 c) 0

uppg. 3

$f(x) = \arcsin x + (2x^3 - x)\sqrt{1-x^2}$ är udda, $D_f = [-1, 1]$ [$D_{\arcsin} = [-1, 1]$]

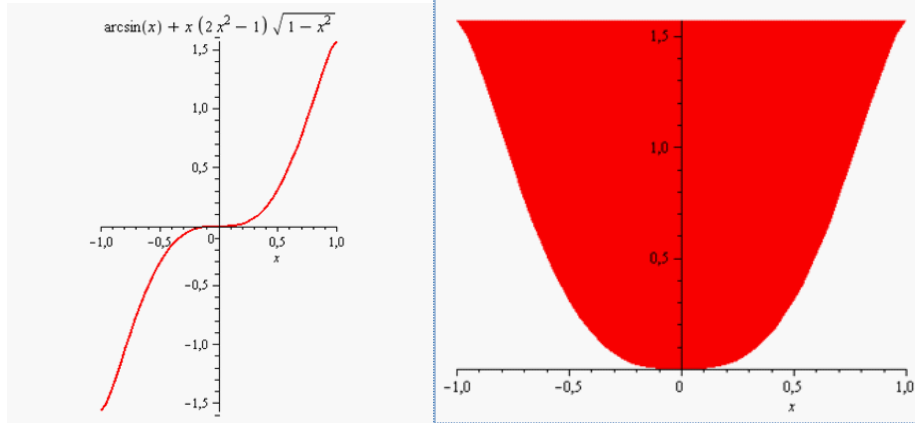
a) För $-1 < x < 1$ är $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + (6x^2 - 1)\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^4 - x^2}{\sqrt{1-x^2}} =$
 $= \frac{1 + (6x^2 - 1)(1 - x^2) - 2x^4 + x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{8(x^2 - x^4)}{\sqrt{1-x^2}} = 8x^2\sqrt{1-x^2} > 0$, det visar att f är
injektiv (strängt växande) på $[-1, 1]$ (f är kontinuerlig).

$Df^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{Df(a)}$ där $f(a) = \arcsin a + a(2a^2 - 1)\sqrt{1-a^2}$; vi ser att $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$,
 $Df\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{8}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$.

b) Vi vet redan att f växer strängt från minsta värdet $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$ till största värdet $f(1) = \frac{\pi}{2}$. För $0 < x < 1$ är $f''(x) = 16x\sqrt{1-x^2} - \frac{8x^3}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$= \frac{8x}{\sqrt{1-x^2}}(2 - 2x^2 - x^2) = \frac{24x}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{2}{3} - x^2\right) \begin{cases} > 0 \text{ då } x < \sqrt{\frac{2}{3}} \\ < 0 \text{ då } x > \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}, \text{ det och att } f$$

är udda ger att f är konvex på $\left[-1, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ och på $\left[0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$, f är konkav på $\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right]$ och på $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, 1\right]$, 0 och $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ är inflexionspunkter.



c) För $x > 0$ är $f(x) > f(0) = 0$, alltså

$$\frac{|f(x)| - |f(0)|}{x-0} = \frac{\arcsin x}{x} + (2x^2 - 1)\sqrt{1-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1 - 1 = 0,$$

för $x < 0$ är $f(x) < f(0) = 0$, alltså

$$\frac{|f(x)| - |f(0)|}{x-0} = \frac{-\arcsin x}{x} - (2x^2 - 1)\sqrt{1-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -1 + 1 = 0,$$

det visar att $|f|$ är deriverbar i 0 med $|f|'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)| - |f(0)|}{x-0} = 0$.

d) Eftersom $0 \leq |f(x)| \leq \frac{\pi}{2}$ enligt b) och $|f(x)|$ är jämn så har området mellan $y = |f(x)|$ och $y = \frac{\pi}{2}$ ($= \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, |f(x)| \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$) arean

$$2 \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2} - (\arcsin x + (2x^3 - x)\sqrt{1-x^2}) \right) dx.$$

Lösning 1: med partiell integration: $\int_0^1 (\arcsin x + (2x^3 - x) \sqrt{1-x^2}) dx =$

$$= \left[x \arcsin x + \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right) \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{(x^4-x^2)x}{2\sqrt{1-x^2}} \right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}x^2 \sqrt{1-x^2} \right) x dx = \left[\begin{array}{l} 1-x^2 = t^2 \\ x dx = -t dt \end{array} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \int_1^0 \left(1 + \frac{t^2(1-t^2)}{2} \right) dt = \frac{\pi}{2} - \left[t + \frac{t^3}{6} - \frac{t^5}{10} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{16}{15}.$$

Lösning 2: med substitutionen $x = \sin t$: $\int_0^1 (\arcsin x + (2x^3 - x) \sqrt{1-x^2}) dx =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t + (2 \sin^2 t - 1) \sin t \cos t) \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - 2 \cos^4 t) \sin t dt =$$

$$= \left[t \sin t + \cos t - \frac{1}{3} \cos^3 t + \frac{2}{5} \cos^5 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{16}{15}.$$

Arean är alltså $2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{16}{15} \right) = \frac{32}{15}$.

svar: a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) se ovan c) ja d) $\frac{32}{15}$

uppg. 4

a) Funktionen $y = \sin x$ är strängt konkav i $[0, \frac{\pi}{2}]$ och går genom punkterna $[0, 0]$ och $[\frac{\pi}{2}, 1]$, ligger alltså strängt ovanför sekanten genom dessa punkter som har ekvationen $y = \frac{2}{\pi}x$; eller du visar det så här: för $g(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi}$ gäller $g(0) = g(\frac{\pi}{2}) = 0$ och $g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi} \begin{cases} > 0 \text{ då } 0 < x < \arccos \frac{2}{\pi} \\ < 0 \text{ då } \arccos \frac{2}{\pi} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, g antar alltså i 0 och $\frac{\pi}{2}$ ett strängt minimum, det visar att $g(x) > 0$ för $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ($0 < \arccos \frac{2}{\pi} < \frac{\pi}{2}$ ty $0 < \frac{2}{\pi} < 1$). vsv

b) Enligt **a)** gäller för $A > 0$ och $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ att $\frac{A2x}{\pi} \leq A \sin x$, alltså (e^x är växande) $0 < e^{-A \sin x} \leq e^{-\frac{2A}{\pi}x}$ och därmed

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A \sin x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2A}{\pi}x} dx = \left[-\frac{\pi}{2A} e^{-\frac{2A}{\pi}x} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2A} (1 - e^{-A}) < \frac{\pi}{2A};$$

eftersom $\sin x$ är symmetrisk m.a.p. $x = \frac{\pi}{2}$ så är $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A \sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-A \sin x} dx$

$$\left[\text{formellt bevis: } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-A \sin x} dx = [\pi - u = x] = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-A \sin(\pi-u)} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A \sin u} du \right],$$

$$\text{alltså har vi } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A \sin x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-A \sin x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A \sin x} dx < \frac{\pi}{A}.$$

vsv Anm: För $0 < A \leq 1$ är det trivialt, ty $\int_0^{\pi} e^{-A \sin x} dx < \int_0^{\pi} 1 dx = \pi \leq \frac{\pi}{A}$.