

Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2007-08-22, kl. 14.00-18.00 i V**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa,**Telefon:** Jonas Hartwig, tel. 0762 – 721860**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

=====

1. Bestäm en ekvation för normalen till kurvan $y = (\sin^2(x) + 1)^{\sqrt{\sin(2x)+1}}$ i den punkt på kurvan där $x = \frac{\pi}{2}$. (4p)
2. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{2n+1}$. (5p)
3. Låt $f(x) = 1 + e(\sinh(x) - x \cosh(x))$, $x \in \mathbb{R}$.
 - a) Visa att f är injektiv (2p) och rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av konvexitet/konkavitet (4p). (6p)
 - b) Beräkna arean av området $\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f(x)\}$. (3p)
4. Låt $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-2x})$, $x \in \mathbb{R}$.
 - a) Beräkna gränsvärdena $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ (om de existerar). (6p)
 - b) Beräkna arean mellan x-axeln och kurvan $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (om den existerar). (6p)
5. Bestäm den primitiva funktion till $\frac{x \arctan x}{(x^2 - 1)^2}$ i $] -1, 1[$ som går genom origo. (7p)
6. Låt $f(x) = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$, $-1 \leq x \leq 1$.
 - a) Är f deriverbar i origo? (4p)
 - b) Beräkna längden av kurvan $y = f(x)$, $-1 \leq x \leq 1$. (5p)
7. a) Definiera $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ för $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. (2p)
 - b) Bevisa att $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0+$. (3p)
 - c) Bestäm den kartesiska mängdprodukten $[1, 2] \times [3, 4]$ av intervallen $[1, 2]$ och $[3, 4]$. (2p)
8. Formulera och bevisa regeln om derivatan av en sammansatt funktion. (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

BB

Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2007-01-16, kl. 14.00-18.00 i V**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa,**Telefon:** Kataryna Iyschenko, tel. 0762 – 721860**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

=====

1. Beräkna gränsvärdena

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sqrt{1+5x} - \sqrt{1+3x}} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} \quad (\text{enbart standardgränsvärden får användas}). \quad (8p)$$

2. Beräkna $\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$. (5p)3. Låt $f(x) = 1 + x^2 - 2x - 2e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.a) Visa att f är injektiv och beräkna $Df^{-1}\left(-\frac{2}{e}\right)$. (6p)b) Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av konvexitet/konkavitet. (4p)4. Avgör om $\int_0^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) dx$ är konvergent eller divergent genom atta) bestämma en primitiv funktion till $\frac{\pi}{2} - \arctan x$ (6p)b) visa att $\frac{\pi}{2} - \arctan x > \frac{x}{1+x^2}$ för $x \geq 0$. (6p)5. Beräkna arean av $\left\{ (x, y) : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq \frac{\sin 2x}{\cos^2 x - 5 \sin x - 7} \right\}$. (6p)6. Bestäm infimum och supremum av $M = \left\{ \frac{\cosh x}{(\cosh x)^2 + 1} : x \in \mathbb{R} \right\}$. (6p)7. Låt $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Visa att om f och g har ett gränsvärde då x går mot a så har även $f + g$ ett gränsvärde då x går mot a . (6p)8. Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara deriverbar på $]a, b[$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Visa att om $f'(x) > 0$ för varje $x \in]a, b[$ så är f strängt växande på $]a, b[$.
Gäller omvändningen? (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

BB

Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2006-10-25, kl. 14.00-18.00 i V**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa,**Telefon:** Elizabet Wulkan, tel. 0762 – 721860**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

=====

1. Är $\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ resp. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ konvergent eller divergent? Motiver väl! (4p)
2. Given är kurvan $C: \mathbf{r}(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$, $0 \leq t \leq a$ ($a > 0$).
 - a) Beräkna längden av kurvan. (5p)
 - b) Till vilken punkt kommer du om du går 2 längdenheter längs kurvan C från $(1,0,0)$? (3p)
3. Låt $f(x) = x((\ln x)^2 - \ln(x^2) + 2)$, $D_f =]0, \infty[$.
 - a) Visa att f är injektiv och beräkna $Df^{-1}(e)$. (6p)
 - b) Var är f konvex resp. konkav? (2p)
 - c) Beräkna arean av området $\{(x, y): 0 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq f(x)\}$. (6p)
4. a) Visa att $\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2) < \frac{1}{x^2}$ för $x > 1$. (5p)
 - b) Är $\int_0^\infty (\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2)) dx$ konvergent eller divergent? (2p)
5. Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ges av $f(0) = 1$ och $f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$ för $0 \neq x \in \mathbb{R}$.
 - a) Visa att f är jämn och kontinuerlig. (4p)
 - b) Beräkna $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} x}{x - \frac{\pi}{2}}$. (4p)
 - c) Är f deriverbar i $\frac{\pi}{2}$? (4p)
6. a) Formulera och bevisa regeln för derivatan av en summa av två funktioner. (6p)
 - b) Definiera $\binom{n}{m}$ ($m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$). (2p)
7. Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (Lagranges sats). (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

BB

Tentamen i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2006-08-21, kl. 8.30-12.30 i V**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa,**Telefon:** Jonas Hartwig, tel. 0762 – 721860**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

=====

1. Avgör om följande integraler konvergerar eller divergerar. Motivera väl!

$$\text{a) } \int_1^3 \frac{1}{|x-2|} dx \quad \text{b) } \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{|x-2|}} dx \quad \text{c) } \int_1^3 \ln|x-2| dx. \quad (8p)$$

2. Visa att $\arctan \frac{2x}{5} + \arctan \frac{2x}{x^2+1} = \arctan \frac{2x(x^2+6)}{x^2+5}$ för alla $x \in \mathbb{R}$. (6p)

3. Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ges av

$$D_f =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad f(0) = 0 \quad \text{och} \quad f(x) = \frac{\ln(\cos x)}{x} \quad \text{för} \quad 0 \neq x \in D_f.$$

- a) Visa att f är C^1 (dvs. f är deriverbar och f' är kontinuerlig). (8p)

- b) Visa att f är injektiv och beräkna $Df^{-1}(0)$. (8p)

4. Låt $f(x) = \frac{\cosh x}{e^x \cosh 2x}$.

- a) Rita funktionskurvan $y = f(x)$ med angivande av asymptoter och extrempunkter. (7p)

- b) Motivera varför integralen $\int_0^\infty f(x) dx$ är konvergent (2p) och beräkna den (6p). (8p)

5. Låt $a \in \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ och $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) Vad menas med " a är inre punkt i D " och vad är "supremum av D "? (3p)

- b) Visa att om f är deriverbar i a så är f även kontinuerlig i a . (4p)

6. Formulera och bevisa differentialkalkylens medelvärdessats (Lagranges sats). (8p)

Betygsgränser:

24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

BB

Tentamensskrivning i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2005-10-19
kl. 14.00-18.00 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa, **Telefon:** Elin Götmark, tel. 0762-721860

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.

Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

=====

1. Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar på $\mathbb{R}$; bevisa eller motbevisa (genom att ge ett motexempel) **a)** f är jämn $\Rightarrow f'$ är udda, **b)** f är udda $\Rightarrow f'$ är jämn, **c)** f' är jämn $\Rightarrow f$ är udda, **d)** f' är udda $\Rightarrow f$ är jämn. (6p)

2. Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x}$ (L'Hospitals regel får ej användas). (4p)

3. Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieras genom

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|} - 1}{x - 1} \quad \text{för } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad \text{och} \quad f(1) = \frac{1}{2}.$$
 - a)** Bevisa att f är kontinuerlig. I vilka punkter är f deriverbar? (5p)
 - b)** Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter och asymptoter. (6p)
 - c)** Bestäm den primitiva funktion F till f som satisfierar $F(0) = 0$. (7p)

4. Låt $f(x) = \arcsin(e^{-x})$.
 - a)** Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av D_f , extrempunkter, konvexitet/konkavitet och asymptoter. Motivera även varför f är injektiv. (6p)
 - b)** Beräkna längden av kurvbågen $y = f(x)$, $0 \leq x \leq \ln 3$. (6p)

5. Bevisa att om $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig på $[a, b]$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$,
 $f(x) \geq 0$ för $x \in [a, b]$ och $f(x_0) > 0$ för en punkt $x_0 \in [a, b]$ så är $\int_a^b f(x) dx > 0$. (5p)

6. **a)** Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara deriverbar på $]a, b[$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Visa att f är växande på $]a, b[$ om och endast om $f'(x) \geq 0$ för varje $x \in]a, b[$. (6p)
b) Visa att $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (du får använda att $\cos(x)$ är kontinuerlig). (5p)
c) Definiera funktionen $\arctan x$ och härled dess derivata. (4p)

Betygsgränser:

24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

BB

Svar till tentor i inledande matematisk analys F1, tma970, ht 0707-08-22

1) $2x - 4\ln(2)y = \pi - 8\ln(2)$ 3a) konvex i $]-\infty, 0]$, konkav i $[0, \infty[$ b) 2

4a) båda är 0 (b) π 5) $\frac{x^2+1}{4(1-x^2)} \arctan x + \frac{1}{8} \ln \frac{1-x}{1+x}$, $|x| < 1$ 6a) nej b) 3

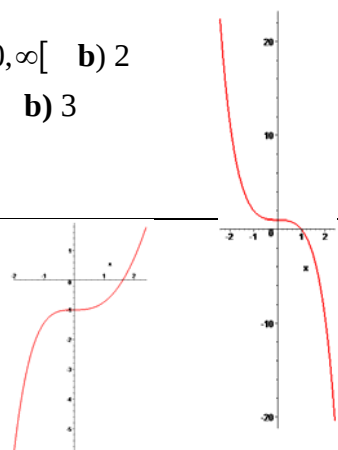
7c) $\{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 4\}$

07-01-16

1a) 2 b) 0 2) $\frac{5\pi}{4}$ 3a) $\frac{e}{2}$ b) konkav i $]-\infty, 0]$, konvex i $[0, \infty[$

4a) $x(\frac{\pi}{2} - \arctan x) + \ln \sqrt{1+x^2}$, integralen är divergent

5) $2\ln \frac{32}{27}$ 6) $\inf M = 0$, $\sup M = \frac{1}{2}$

06-10-25

1) Båda är konvergenta 2a) $\sqrt{2} \sinh a$ b) $(\sqrt{3}, \sqrt{2}, \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}))$

3a) 1 b) konkav i $]0, 1]$, konvex i $[1, \infty[$ c) $\frac{3}{4}e^2$ 4b) konvergent

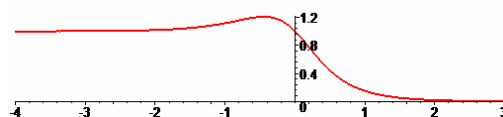
5b) $-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ c) nej

06-08-21

1a) divergent b) konvergent c) konvergent 3b) -2

4a) asymptoter: $y = 1$, $y = 0$,

maximipunkt: $(\ln \sqrt{2} - 1, \frac{\sqrt{2}+1}{2})$ b) $\frac{\pi + \ln 4}{8}$

05-10-19

1) (c) falsk, övriga sanna 2) 0

3a) f är deriverbar i alla punkter $x \neq 0$ b) lok. minimum i $x = -3 - 2\sqrt{2}$, maximum i 0,

asymptot: $y = 0$ c) $F(x) = \begin{cases} 2\sqrt{-x} - \ln(1-x) - 2\arctan \sqrt{-x} & \text{om } x < 0 \\ 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$

4a) $D_f = [0, \infty[$, f är strängt konvex, asymptot: $y = 0$

b) $\ln(3 + 2\sqrt{2})$

