

Tentamen inledande matematisk analys för F1 (tma970), 07-08-22

uppg. 1

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin^2(x) + 1)^{\sqrt{\sin(2x)+1}} = e^{\sqrt{\sin(2x)+1} \ln(\sin^2(x)+1)} \implies \\ f'(x) &= e^{\sqrt{\sin(2x)+1} \ln(\sin^2(x)+1)} \left(\frac{\cos(2x) \ln(\sin^2(x)+1)}{\sqrt{\sin(2x)+1}} + \frac{\sqrt{\sin(2x)+1} 2 \sin(x) \cos(x)}{\sin^2(x)+1} \right), \\ \implies f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= e^{\ln 2} (-\ln 2); \text{ normalens ekvation är } \frac{y-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{f'(\frac{\pi}{2})} \text{ dvs} \\ \frac{y-2}{x-\frac{\pi}{2}} &= \frac{1}{2 \ln 2} \text{ eller } (2 \ln 2) y - 4 \ln 2 = x - \frac{\pi}{2} \text{ [eller med } \sin(2x)+1 = (\sin x + \cos x)^2]. \\ \boxed{\text{svar: } x - (2 \ln 2) y &= \frac{\pi}{2} - 4 \ln 2} \end{aligned}$$

uppg. 2

Vi visar med induktion att $P(n) : \binom{2n}{n} > \frac{4^n}{2n+1}$ är sant för alla $n \in \mathbb{N}$:

Obs: $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!) (2n-n)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$

I. $n=1$: $VL = \binom{2}{1} = 2 > \frac{4}{2+1} = HL$, $P(1)$ är alltså sant.

II. Vi skall visa att för ett godt. $p \geq 1$ gäller $P(p) \implies P(p+1)$, dvs. att

$$\binom{2p+2}{p+1} > \frac{4^{p+1}}{2p+3} \text{ är sant om } P(m) \text{ är sant för alla } m, 1 \leq m \leq p:$$

$$\begin{aligned} \binom{2(p+1)}{p+1} &= \frac{(2p)!(2p+1)(2p+2)}{((p+1)!)^2} = \frac{(2p)!(2p+1)2}{(p!)^2(p+1)} = \\ &= \binom{2p}{p} \frac{(2p+1)2}{p+1} \stackrel{P(p) \text{ är sant}}{>} \frac{4^p}{2p+1} \cdot \frac{2(2p+1)}{p+1} = \frac{4^p \cdot 2}{p+1}. \end{aligned}$$

Vi visar nu att $\frac{4^p \cdot 2}{p+1} > \frac{4^{p+1}}{2p+3}$ (då har vi visat att $P(p+1)$ är sant):

$$\frac{4^p \cdot 2}{p+1} > \frac{4^{p+1}}{2p+3} \iff \frac{2}{p+1} > \frac{4}{2p+3} \iff 2p+3 > 2p+2$$

och detta stämmer, alltså har vi visat $P(p) \implies P(p+1)$.

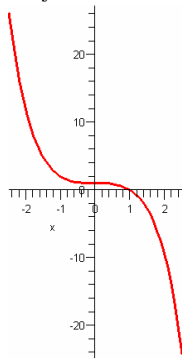
III. Induktionsaxiomet ger då att $P(n)$ är sant för alla $n \in \mathbb{N}$. vsv

uppg. 3

$$f(x) = 1 + e(\sinh x - x \cosh x), \quad f'(x) = -ex \sinh x.$$

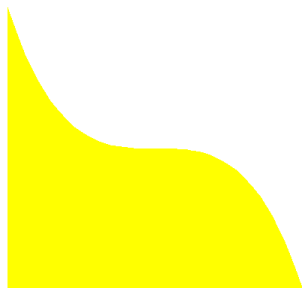
a) $f'(x) > 0$ för alla $x \neq 0$, eftersom f är kontinuerlig så ger det att f är strängt växande på $]-\infty, 0]$ och på $[0, \infty[$ och därmed injektiv på hela $\mathbb{R}$.

$f''(x) = -e(x \cosh x + \sinh x) \begin{cases} > 0, \text{ då } x < 0 \\ < 0, \text{ då } x > 0 \end{cases}$, det visar att
 f är str. konvex i $]-\infty, 0]$ och str. konkav i $[0, \infty[$ (origo är inflexionspunkt).
 Vidare gäller
 $f(x) = 1 + \frac{\varepsilon}{2}((1-x)e^x - (1+x)e^{-x}) \longrightarrow \begin{cases} \infty, \text{ då } x \rightarrow -\infty \\ -\infty, \text{ då } x \rightarrow \infty \end{cases}$ ty
 $(1-|x|)e^{-|x|} \rightarrow 0$ då $|x| \rightarrow \infty$ och $(1-x)e^{|x|} \rightarrow \mp \infty$ då $|x| \rightarrow \pm \infty$.
 Grafen till f ser alltså ut så här:



b) För $-1 \leq x \leq 1$ är $f(x) \geq f(1) = 0$, alltså är den sökta arean

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 1 dx = 2 \quad (\sinh x - x \cosh x \text{ är udda}).$$



svar: a) f str. konvex i $]-\infty, 0]$, str. konkav i $[0, \infty[$ b) arean är 2

uppg. 4

$$f(x) = e^x \ln(1 + e^{-2x}).$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{e^{-x}=t \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(t) + \ln(1+\frac{1}{t^2})}{t} = 2 \cdot 0 + 0 = 0, \text{ eller} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (\ln(e^{2x} + 1) - \ln(e^{2x})) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \ln(e^{2x} + 1) - 2xe^x) = 0. \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cdot \frac{\ln(1+e^{-2x})}{e^{-2x}} = \lim_{e^{-x}=t \rightarrow 0+} t \cdot \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} = 0 \cdot 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Vi utnyttjade standardgränsvärden $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\ln(1+v)}{v} = 1$, $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\ln(v)}{v} = 0$.

b) $f(x) > 0$. Vi visar att $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ och $\int_0^{\infty} f(x) dx$ båda är konvergenta

genom att beräkna en primitiv funktion F till f :

$$F(x) = \int e^x \ln(1 + e^{-2x}) dx = [\text{part.int}] = e^x \ln(1 + e^{-2x}) + \int \frac{e^x \cdot 2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} dx =$$

$$= e^x \ln(1 + e^{-2x}) + 2 \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = f(x) + 2 \arctan e^x. \text{ Alltså:}$$

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx = F(0) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = f(0) + 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 0 - 2 \cdot 0$$

(integralen är alltså konvergent) och

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0 + 2 \cdot \frac{\pi}{2} - f(0) - 2 \cdot \frac{\pi}{4} \text{ (integralen är konvergent),}$$

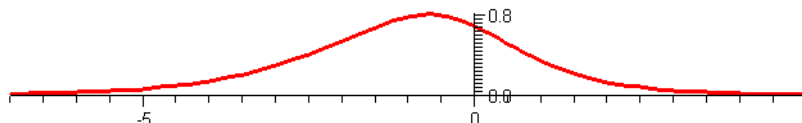
$$\text{svaret är därmed } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx = \pi.$$

Anm.: Konvergensen av integralerna kan även visas med hjälp av jämförelsekriteriet, t. ex. för $x \leq 0$:

$$f(x) = e^x \ln(1 + e^{2x}) - 2xe^x, \int_{-\infty}^0 e^x \ln(1 + e^{2x}) dx \text{ är konvergent ty}$$

$$e^x \ln(1 + e^{2x}) < e^x \ln 2 \text{ och } \int_{-\infty}^0 e^x dx \text{ är konvergent, } \int_{-\infty}^0 xe^x dx = [xe^x - e^x]_{-\infty}^0$$

är konvergent, alltså är $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ konvergent.



svar: a) båda är 0 **b)** arean är π

uppg. 5

$$\int \frac{x \arctan x}{(x^2 - 1)^2} dx = [\text{part.int}] = \frac{-1}{2(x^2 - 1)} \cdot \arctan x + \int \frac{1}{2(x^2 - 1)(x^2 + 1)} dx =$$

$$= \frac{\arctan x}{2(1 - x^2)} - \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 - x^2} \right) dx =$$

$$= \frac{\arctan x}{2(1 - x^2)} - \frac{1}{4} \left(\int \frac{1}{1 + x^2} dx + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x} \right) dx \right) =$$

$$= \frac{\arctan x}{2(1 - x^2)} - \frac{\arctan x}{4} - \frac{1}{8} (\ln(1 + x) - \ln(1 - x)) + c.$$

$$F(0) = 0 \text{ ger } c = 0.$$

$$\text{svar: } \frac{\arctan x}{2(1 - x^2)} - \frac{\arctan x}{4} + \frac{1}{8} (\ln(1 - x) - \ln(1 + x))$$

uppg. 6

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} - 1}{x} = \frac{\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 - 1}{x \left(\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + 1\right)} = \\ &= \frac{-3x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{4}{3}} - x^2}{x \left(\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + 1\right)} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{-3 + 3x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}{\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + 1} \rightarrow \begin{cases} \infty, & \text{då } x \rightarrow 0- \\ -\infty, & \text{då } x \rightarrow 0+ \end{cases}, \end{aligned}$$

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ saknar alltså gränsvärde då $x \rightarrow 0$, dvs. f är ej deriverbar i origo.

$$\text{b)} \quad f \text{ är jämn, om längden existerar så är den } L = 2 \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx =$$

$$(\text{en generaliserad integral!}) = 2 \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}}\right)^2} dx =$$

$$= 2 \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1 - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx = 3 \left[x^{\frac{2}{3}}\right]_0^1 = 3.$$

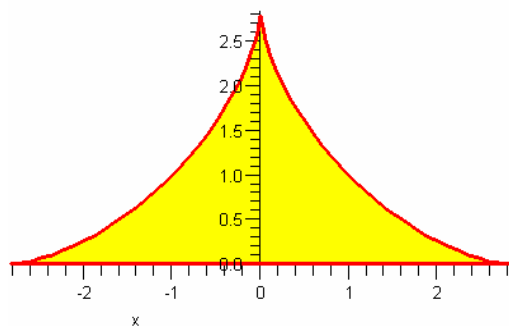
En annan lösning får du med substitutionen $x = \cos^3 \varphi$, kurvan har då parameterframställningen $\begin{cases} x = \cos^3 \varphi \\ y = \sin^3 \varphi \end{cases}$, $0 \rightarrow \pi$ och längden blir

$$L = \int_0^\pi \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} d\varphi = 3 \int_0^\pi \sqrt{\cos^4 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi} d\varphi = (\text{ej}$$

$$\text{generaliserad}) = 3 \int_0^\pi |\cos \varphi \sin \varphi| d\varphi = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = 3 \left[\sin^2 \varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3.$$

Kurvan är (de övre två bågarna av) den välkända asteroiden.

svar: a) nej b) 3



uppg. 7c

$[1, 2] \times [3, 4] = \{(x, y) : x \in [1, 2], y \in [3, 4]\}$, det är rektangeln $R : \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 3 \leq y \leq 4 \end{cases}$
(i xy -planet).