

Tentamen inledande matematisk analys för F1 (tma970), 07-01-16

uppg. 1

a) $f(x) = \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sqrt{1+5x} - \sqrt{1+3x}} = \frac{(\sin 5x - \sin 3x)(\sqrt{1+5x} + \sqrt{1+3x})}{2x} =$
 $= \frac{(\sqrt{1+5x} + \sqrt{1+3x})}{2} \left(\frac{5 \sin 5x}{5x} - \frac{3 \sin 3x}{3x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}}{2} (5 - 3) = 2$
 ty $\sqrt{x}$ är kontinuerlig och $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. Eller $f(x) = \frac{2 \cos 4x \sin x (\sqrt{1+5x} + \sqrt{1+3x})}{2x} \dots$
 b) $\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} = \frac{1}{e^{x \ln(\ln x) - (\ln x)^2}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ ty $x \ln(\ln x) - (\ln x)^2 =$
 $= x \ln(\ln x) \left(1 - \frac{1}{\ln(\ln x)} \frac{(\ln x)^2}{x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$ ty $1 - \frac{1}{\ln(\ln x)} \frac{(\ln x)^2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1 - 0$
 ty $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$.

svar: a) 2 b) 0

uppg. 2

Sätt $\alpha = \arctan 2$, $\beta = \arctan 5$ och $\gamma = \arctan 8$; då är $\tan \alpha = 2$, $\tan \beta = 5$,
 $\tan \gamma = 8$ och vi får $\tan(\beta + \gamma) = \frac{\tan \beta + \tan \gamma}{1 - \tan \beta \tan \gamma} = \frac{5+8}{1-5 \cdot 8} = -\frac{1}{3}$, alltså
 $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\tan \alpha + \tan(\beta + \gamma)}{1 - \tan \alpha \tan(\beta + \gamma)} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = 1$, det ger $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4} + n\pi$ för
 något $n \in \mathbb{Z}$; eftersom $\arctan$ är strängt växande så gäller
 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4} < \alpha < \beta < \gamma < \frac{\pi}{2}$, alltså $\frac{3\pi}{4} < \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4} + n\pi < \frac{3\pi}{2}$
 vilket ger $n = 1$.

svar: $\frac{5\pi}{4}$

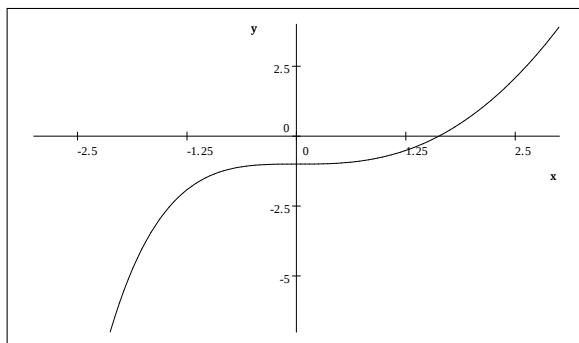
uppg. 3

$$f(x) = (x-1)^2 - 2e^{-x}, \quad f'(x) = 2(x-1 + e^{-x}),$$

$f''(x) = 2(1 - e^{-x}) \begin{cases} < 0 & \text{då } x < 0 \\ > 0 & \text{då } x > 0 \end{cases}$, dvs. f' är strängt avtagande (f är
 strängt konkav) i $]-\infty, 0]$, f' är strängt växande (f är strängt konvex) i $[0, \infty[$,
 alltså har f' ett strängt minimum i 0 (0 är inflexionspunkt), dvs.
 $f'(x) > f'(0) = 0$ för alla $x \neq 0$. Det ger nu:

a) Eftersom f är kontinuerlig så är f strängt växande på $]-\infty, 0]$ och på
 $[0, \infty[$ och därmed injektiv på hela $\mathbf{R}$.
 $Df^{-1}\left(-\frac{2}{e}\right) = \frac{1}{Df(a)}$ där $f(a) = (a-1)^2 - 2e^{-a} = -\frac{2}{e}$, vi "ser" $a = 1$,
 alltså är $Df^{-1}\left(-\frac{2}{e}\right) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2e^{-1}}$.

- b) $f(x) = (x-1)^2 - 2e^{-x} \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$ och
 $f(x) = -e^{-x} (2 - e^x (x-1)^2) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow -\infty$ (ty $e^x (x-1)^2 \rightarrow 0$
då $x \rightarrow -\infty$). Vidare saknar $\frac{f(x)}{x}$ gränsvärde då $x \rightarrow \pm\infty$, alltså saknas
sneda asymptoter.



svar: $f^{-1}\left(-\frac{2}{e}\right) = \frac{e}{2}$ b) f str. konkav i $]-\infty, 0]$, str. konvex i $[0, \infty[$

uppg. 4

- a) $\int \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) dx = [\text{p.i.}] = \frac{\pi}{2}x - x \arctan x + \int \frac{x}{1+x^2} dx =$
 $= \frac{\pi}{2}x - x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$, en primitiv funktion är alltså
 $F(x) = x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.
 $F(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$, ty $\frac{\pi}{2} - \arctan x > 0$ och $\ln(1+x^2) \rightarrow \infty$
då $x \rightarrow \infty$, dvs. $\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) dx$ är divergent.
- b) Visa att $g(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{x}{1+x^2} > 0$ för $x \geq 0$:
 $g'(x) = -\frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{2}{(1+x^2)^2} < 0$, g är alltså strängt avtagande
och därmed $g(x) > \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 0 = 0$. vsv
 $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right]_0^\infty$ är divergent, jämförelsekriteriet ger att då
även $\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) dx$ är divergent ty $\frac{\pi}{2} - \arctan x > \frac{x}{1+x^2} > 0$.

svar: $\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) dx$ är divergent

uppg. 5

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2x}{\cos^2 x - 5 \sin x - 7} &\geq 0 \text{ för } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0, \text{ ty } \sin 2x \leq 0 \text{ och } \cos^2 x - 5 \sin x - 7 \leq 0 \\ (7 > |\cos^2 x| + 5 |\sin x|), \text{ alltså är arean} \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin 2x}{\cos^2 x - 5 \sin x - 7} dx &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin x \cos x}{-\sin^2 x - 5 \sin x - 6} dx = \left[\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right] = \\ &= 2 \int_{-1}^0 \frac{-t}{t^2 + 5t + 6} dt = [\text{pbu}] = 2 \int_{-1}^0 \left(\frac{2}{t+2} - \frac{3}{t+3} \right) dt = 2 [2 \ln(t+2) - 3 \ln(t+3)]_{-1}^0 = \\ &= 2(2 \ln 2 - 3 \ln 3 + 3 \ln 2) = 2(5 \ln 2 - 3 \ln 3) = \underline{2 \ln \frac{32}{27}}. \end{aligned}$$

svar: $2 \ln \frac{32}{27}$

uppg. 6

Sätt $f(x) = \frac{\cosh x}{\cosh^2 x + 1}$, då är $M = V_f$. f är jämn, det räcker alltså att studera f för $x \geq 0$:

$$f'(x) = \frac{\sinh x (\cosh^2 x + 1) - 2 \cosh^2 x \sinh x}{(\cosh^2 x + 1)^2} = \frac{\sinh x (1 - \cosh^2 x)}{(\cosh^2 x + 1)^2} < 0 \text{ för } x > 0,$$

f är således strängt avtagande på $[0, \infty[$ och strängt växande på $] -\infty, 0]$, antar alltså i 0 ett strängt maximum och vi har

$$\underline{\sup M} = f(0) = \underline{\frac{1}{2}} \quad (= f \text{ :s största värde) och}$$

$$\underline{\inf M} = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(e^x + e^{-x})}{e^{2x} + e^{-2x} + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(e^{-x} + e^{-3x})}{1 + e^{-4x} + 6e^{-2x}} = 0$$

(sats: f avtagande och begränsad nedåt på $[0, \infty[\implies \inf V_f = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$).

Eller: s.o.m.v. ger att $\underline{V_f} =]0, \frac{1}{2}]$, alltså $\inf M = \inf]0, \frac{1}{2}] = 0$

$$\text{och } \sup M = \sup]0, \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}.$$

svar: $\inf M = 0, \sup M = \frac{1}{2}$