

Tentamen inledande matematisk analys för F1 (tma970), 07-10-27

uppg. 1

$\frac{1}{x} \rightarrow 0_+$ då $x \rightarrow \infty$ och således (alltid "då $x \rightarrow \infty$ " i det följande)
 $\sinh\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0_+ \implies \ln\left(\sinh\frac{1}{x}\right) \rightarrow -\infty \implies x \ln\left(\sinh\frac{1}{x}\right) \rightarrow -\infty$
 $\implies \left(\sinh\frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(\sinh\frac{1}{x}\right)} \rightarrow 0$;

$\frac{1}{x} \ln(\sinh x) = \frac{1}{x} \ln\left(e^x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right)\right) = 1 + \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right) \rightarrow 1 + 0$
 $\implies \left(\sinh x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(\sinh x)} \rightarrow e$ (e^x är kontinuerlig);

$\frac{1}{x} \ln\left(\sinh\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\sinh\left(\frac{1}{x}\right)} \sinh\left(\frac{1}{x}\right) \ln\left(\sinh\frac{1}{x}\right) \rightarrow 1 \cdot 0$, ty $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sinh t}{t} = \cosh(0) = 1$
 och $\lim_{t \rightarrow 0_+} t \ln t = 0$, alltså $\left(\sinh\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln\left(\sinh\frac{1}{x}\right)} \rightarrow e^0 = 1$.

svar: 0 resp. e resp. 1

uppg. 2

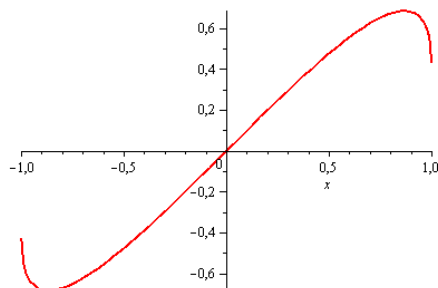
a) f är kontinuerlig och udda, för $0 < x < 1$ gäller

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4(1-x^2)-1}{\sqrt{1-x^2}(2\sqrt{1-x^2}+1)} = \frac{3-4x^2}{\sqrt{1-x^2}(2\sqrt{1-x^2}+1)},$$

$$\implies f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{då } x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ < 0 & \text{då } x > \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \implies f \text{ antar på } [0, 1] \text{ i } \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ett största}$$

värde $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$. $f''(x) = -\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} < 0$, det ger att f är strängt konkav i $[0, 1]$. Eftersom f är udda har vi även: f är str. konvex i $[-1, 0]$, antar på $[-1, 0]$ ett minsta värde $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$ och 0 är inflexionspunkt; $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ är f :s största värde ty $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0 > f(-1) = -2 + \frac{\pi}{2}$, satsen om mellanliggande värden ger då (f är kontinuerlig) att $V_f = \left[-\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}, \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right]$.

$$y = 2 \cdot x - \arcsin(x)$$



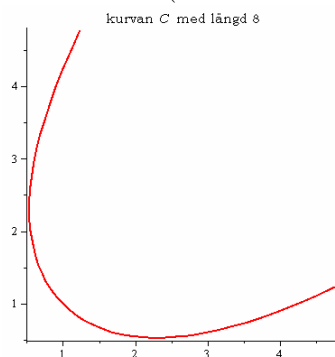
b) Enligt **a)** är $f(x) \geq 0$ för $x \in [0, 1]$ (f är str. växande i $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ alltså $f(x) \geq f(0) = 0$ där; f är str. avtagande i $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ alltså $f(x) \geq f(1) = 2 - \frac{\pi}{2} > 0$ där), alltså gäller $\arcsin x \leq 2x$ och därmed $0 \leq \frac{\arcsin x}{x\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ för $x \in [0, 1]$, $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}} dx$ är konvergent, jämförelsekriteriet ger att då även $\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ är konvergent.

svar:

a) f är konvex i $[-1, 0]$, konkav i $[0, 1]$, $V_f = \left[-\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}, \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right]$ **b)** konvergent

uppg. 3

$\mathbf{r}(t) = (\cosh t - t, \cosh t + t) \implies |\mathbf{r}'(t)| = |(\sinh t - 1, \sinh t + 1)| = \sqrt{2 \sinh^2 t + 2} = \sqrt{2} \cosh t$, kurvans längd är alltså $L = \int_{-a}^a |\mathbf{r}'(t)| dt = [\text{jämn integrand}] = 2\sqrt{2} \int_0^a \cosh t dt = 2\sqrt{2} \sinh a \stackrel{!}{=} 4 \iff \sinh a = \sqrt{2} \iff a = \operatorname{arcsinh} \sqrt{2} = \ln \left(\sqrt{2} + \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1} \right) = \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
 $[e^a - e^{-a} = 2\sqrt{2} \iff (e^a)^2 - 2\sqrt{2}e^a = 1 \iff (e^a - \sqrt{2})^2 = 3 \dots]$
 Kurvan ser ut så (ritad dubbelt så lång)



svar: $a = \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

uppg. 4

Vi sätter $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$.

a) $f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{-1}{x(1+x)^2} < 0$ för $x > 0$,
 $\implies f$ är str. avtagande, alltså $f(x) > \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ln 1 - 0 = 0$ för $x > 0$.

- b)** $\int f(x) dx = [\text{part.int.}] = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \int \frac{-x}{x(1+x)} dx - \int \frac{1}{1+x} dx =$
 $= x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + c$, vi tar $F(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$; då kan vi beräkna
 $\int_0^1 f(x) dx = F(1) - \lim_{x \rightarrow 0+} F(x) = \ln 2 - \lim_{x \rightarrow 0+} (x \ln(1+x) - x \ln x) =$
 $= \ln 2 - (0 - 0) = \ln 2$ och $\int_1^\infty f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - F(1) =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} - \ln 2 = 1 - \ln 2$ [ty $\lim_{t \rightarrow 0+} t \ln t = 0$ och $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$].
 $\int_0^1 f(x) dx$ och $\int_1^\infty f(x) dx$ är alltså konvergenta och därmed är
 $\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^\infty f(x) dx$ konvergent (med värdet 1).
- c)** Enligt **a)** och **b)** är $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{F(x)}$ och $h'(x) = e^{F(x)} F'(x) =$
 $= e^{F(x)} f(x) > 0$ för $x > 0$, h är alltså strängt växande och därmed injektiv
på $]0, \infty[$ och $Dh^{-1}(2) = \frac{1}{h'(a)}$ där $h(a) = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^a = 2$, dvs. $a = 1$, alltså
 $Dh^{-1}(2) = \frac{1}{e^{F(1)} f(1)} = \frac{1}{2(\ln 2 - \frac{1}{2})} = \frac{1}{2 \ln 2 - 1}$.

svar: b) $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, $\int_0^\infty f(x) dx$ är konvergent **c)** $\frac{1}{2 \ln 2 - 1}$

uppg. 5

$f(0) = 0$ och $f(x) = x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)$ för $x \neq 0$.

- a)** f är deriverbar i 0 ty $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) = 0 = f'(0)$
(faktorn $2 + \sin \frac{1}{x}$ är begränsad, faktorn x går mot 0), men f' är inte
kontinuerlig i 0 ty $f'(x) = 2x \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) - \cos \frac{1}{x}$ och t.ex.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 0 - 1 \neq f'(0)$.
- b)** $f(x) = x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) > 0$ för $x \neq 0$ ($\sin \frac{1}{x} < 2$), det visar:
 $f(0) = 0$ är f :s minsta värde (strängt); vore f avtagande i något
intervall $]-\varepsilon, 0[$ och växande i något intervall $]0, \varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$) så vore $f'(x) \leq 0$
för alla $x \in]-\varepsilon, 0[$ och $f'(x) \geq 0$ för alla $x \in]0, \varepsilon[$ (f är deriverbar), men
det är inte möjligt ty för varje $\varepsilon > 0$ finns $n \in \mathbb{N}$ så stort att $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (ty
 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$), då har vi $\frac{-1}{(2n+1)\pi} \in]-\varepsilon, 0[$ med $f'\left(\frac{-1}{(2n+1)\pi}\right) =$
 $= \frac{-4}{(2n+1)\pi} + 1 > 0$ och $\frac{1}{2n\pi} \in]0, \varepsilon[$ med $f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = \frac{2}{n\pi} - 1 < 0$, alltså kan f
ej vara avtagande i något intervall $]-\varepsilon, 0[$ och ej växande i något intervall
 $]0, \varepsilon[$. Eller visa det direkt: f är inte växande i $]0, \varepsilon[$ ty välj $n \in \mathbb{N}$ så stort
att $\frac{1}{n} < \varepsilon$ och $x_1 = \frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}$, $x_2 = \frac{1}{(4n-1)\frac{\pi}{2}}$, då är $x_1, x_2 \in]0, \varepsilon[$, $x_1 < x_2$
men $f(x_1) = \frac{4}{((4n+1)\pi)^2} \cdot 3 > f(x_2) = \frac{4}{((4n-1)\pi)^2}$ ty $\sqrt{3}(4n-1) > 4n+1$.
Analogt för $]-\varepsilon, 0[$. vsv