

Tentamen inledande matematisk analys för F1 (tma970), 08-01-15

uppg. 1

- a) Påstående: För alla $2 \leq n \in \mathbb{N}$ gäller $P(n) : (1+x)^n > 1+nx$
("Bernoullis olikhet"; $-1 \leq x \neq 0$ ett reellt tal; för $x=0$ gäller likhet).

Bevis med induktion:

I. för $n=2$ gäller: $VL = (1+x)^2 = 1+2x+x^2 \underset{x \neq 0}{>} 1+2x = HL,$

$P(2)$ är alltså sant.

II. Föruts.: $(1+x)^m > 1+mx$ är sant för alla $m \in \mathbb{N}$, $2 \leq m \leq p_0$,
för något $2 \leq p_0 \in \mathbb{N}$.

Påst.: $(1+x)^{p_0+1} > 1+(p_0+1)x$ är sant (dvs. $P(p_0) \implies P(p_0+1)$).

Bevis: $VL = (1+x)^{p_0+1} = (1+x)^{p_0} (1+x) \underset{\text{föruts.}}{>} (1+p_0x)(1+x) =$
 $= 1+p_0x+x+p_0x^2 \underset{p_0x^2 > 0}{>} 1+1+(p_0+1)x = HL. \quad \text{vsv}$

III. Induktionsaxomet ger då att $P(n)$ är sant för alla $2 \leq n \in \mathbb{N}$. vsv

b) $(1+x)^n - 1 - nx \underset{\text{binomialteoremet}}{=} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^k - 1 - nx = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^k,$
alltså är $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{k-2} = \binom{n}{2} + 0.$

svar: b) $\frac{n(n-1)}{2}$

uppg. 2

a) $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \frac{-\sin x}{x} e^{\cos x} & \text{då } x < 0 \\ \frac{\sin x}{x} e^{\cos x} & \text{då } x > 0 \end{cases}, \text{ alltså (ty } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} e^{\cos x} = 1 \cdot e^1)$
 $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -e \neq e = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x},$ dvs. f är inte deriverbar i origo
($\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ saknar gränsvärde då x går mot 0).

b) f har period 2π och är jämn, det räcker alltså att studera f på $[0, \pi]$:
för $0 < x < \pi$ är $f'(x) = (\cos x - \sin^2 x) e^{\cos x} = (\cos^2 x + \cos x - 1) e^{\cos x} =$
 $= \left(\left(\cos x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{5}{4} \right) e^{\cos x} = \underbrace{\left(\cos x + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)}_{>0} e^{\cos x},$

det ger med $\alpha_0 = \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$: $f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{då } 0 < x < \alpha_0 \\ < 0 & \text{då } \alpha_0 < x < \pi \end{cases},$

f antar alltså i α_0 ett strängt lokalt maximum ($f(\alpha_0) = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}-1}e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$)
och i 0 och i π ett strängt lokalt minimum ($f(0) = f(\pi) = 0$).

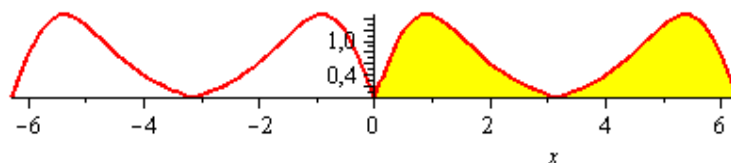
$$f''(x) = (-2 \sin x \cos x - \sin x - \sin x \cos^2 x - \sin x \cos x + \sin x) e^{\cos x} =$$

$$= \underbrace{-\sin x \cos x}_{-\frac{1}{2} \sin 2x} \underbrace{(3 + \cos x)}_{>0} e^{\cos x} \begin{cases} < 0 & \text{då } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ > 0 & \text{då } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}, \text{ det ger att } f \text{ är}$$

konkav på $[0, \frac{\pi}{2}]$ och konvex på $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\frac{\pi}{2}$ är alltså inflexionspunkt.

Eftersom f är jämn så har f ett strängt lok. maximum även i $-\alpha_0$ och är konvex på $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ och konkav på $[-\frac{\pi}{2}, 0]$.

ANM: f är konvex på $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ men inte konkav på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$!



c) Arealen av den skuggade mängden är $\underline{A} = \int_0^{2\pi} |\sin x| e^{\cos x} dx =$

$$= \int_0^{\pi} \sin x e^{\cos x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) e^{\cos x} dx = [-e^{\cos x}]_0^{\pi} + [e^{\cos x}]_{\pi}^{2\pi} = 2(e - e^{-1}).$$

ANM: eftersom f är symmetrisk kring $x = \pi$ (eller med $\int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) e^{\cos x} dx =$

$$[x = u + 2\pi] = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin u| e^{\cos u} du \text{ så är } A = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| e^{\cos x} dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x e^{\cos x} dx.$$

svar:

a) nej **b)** min. i $k\pi$, max. i $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + k\pi$, infl.pkt. i $\frac{\pi}{2} + k\pi$ **c)** $4 \sinh 1$

uppg. 3

$$\mathbf{r}(t) = (2t - \sin(2t), 4 \sin t, \cos(2t)) \implies$$

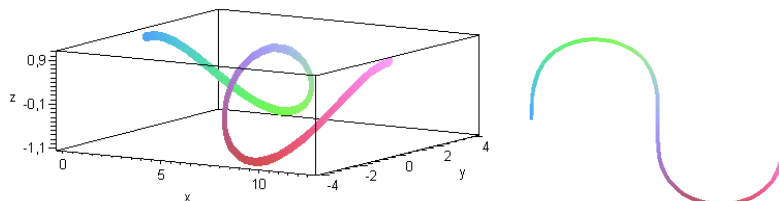
$$|\mathbf{r}'(t)| = |(2 - 2 \cos(2t), 4 \cos t, -2 \sin(2t))| =$$

$$= \sqrt{4 + 4 \cos^2(2t) - 8 \cos(2t) + 16 \cos^2(t) + 4 \sin^2(2t)} =$$

$$= \sqrt{8 - 8 \cos(2t) + 16 \cos^2(t)} = 4 \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 4, \text{ kurvans längd är}$$

$$\text{alltså } L = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)| dt = 4 \int_0^{2\pi} dt = 8\pi.$$

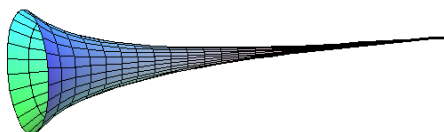
Kurvan (och dess projektion på xy -planet) ser ut så:



svar: 8π

uppg. 4

$$\begin{aligned} \text{Volymen av rotationskroppen är } & \int_{\ln 2}^{\infty} \pi \left(\frac{1}{\sqrt{\sinh x}} \right)^2 dx = \pi \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{2e^x}{e^{2x}-1} dx = [\text{pbud}] = \\ & = \pi \int_{\ln 2}^{\infty} e^x \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{e^x+1} \right) dx = \pi \left[\ln \frac{e^x-1}{e^x+1} \right]_{\ln 2}^{\infty} = \pi \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} - \ln \frac{2-1}{2+1} \right) = \\ & = \pi \left(0 - \ln \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$



svar : $\pi \ln 3$

uppg. 5

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} + \frac{3x+4}{x^2+3x+2}. \text{ Börja med } \int \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} dx = [\text{integrera partiellt}] = \\ &= x \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} - \int x \frac{x^2+3x+2}{x^2} \cdot \frac{2x(x^2+3x+2) - x^2(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} dx = \\ &= x \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} - \int \frac{2x^2+6x+4-2x^2-3x}{x^2+3x+2} dx = x \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} - \int \frac{3x+4}{x^2+3x+2} dx, \text{ alltså} \\ F(x) &= \int f(x) dx = \int \left(\ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} + \frac{3x+4}{x^2+3x+2} \right) dx = x \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ev. blir räkningarna enklare med } \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} &= \ln x^2 - \ln((x+1)(x+2)) = \\ [x > 0] &= 2 \ln x - \ln(x+1) - \ln(x+2); F \text{ kan därmed även beräknas så här:} \\ F(x) &= \int (2 \ln x - \ln(x+1) - \ln(x+2)) dx + \int \frac{3x+4}{x^2+3x+2} dx = [\text{p.i., pbud}] = \\ &= 2(x \ln x - x) - ((x+1) \ln(x+1) - x) - (x+2) \ln(x+2) - x + \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right) dx = \\ &= 2x \ln x - (x+1) \ln(x+1) - (x+2) \ln(x+2) + \ln(x+1) + \ln(x+2) + c = \\ &= x \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} + c \text{ s.o..} \end{aligned}$$

$$\text{Då har vi } \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{\infty} f(x) dx =$$

$$\begin{aligned} F(1) - \lim_{x \rightarrow 0+} F(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - F(1) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} - \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \frac{-\ln(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})}{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \right) - \lim_{x \rightarrow 0+} (2x \ln x - x \ln(x+1) - x \ln(x+2)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})}{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} \left(3 + \frac{2}{x} \right) \right) - (2 \cdot 0 - 0 - 0) = -1 \cdot (3+0) - 0 = \underline{-3}, \end{aligned}$$

$$\text{ty } \lim_{x \rightarrow 0+} (x \ln x) = 0 \text{ och } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})}{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

$$(h = \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \infty). \int_0^{\infty} f(x) dx \text{ är alltså konvergent (med värdet } -3).$$

svar: En primitiv funktion är $x \ln \frac{x^2}{x^2+3x+2}$, $\int_0^{\infty} f(x) dx$ är konvergent