

Här är några typiska tentatal för inledande matematisk analys F1

Räkna dem hemma, **skriv ner** en lösning!! De demonstreras 16/17 okt, facit finns på baksidan,

1. Hur många lösningar har ekvationen $\tan x - \cot x = 2x$ i intervallet $]0, \frac{\pi}{2}[$? (6p)
2. Det kommer tre teorifrågor på tentan som väljs ur en lista med sju frågor.
Hur många tentor kan man göra innan samma tre teorifrågor kommer igen? (4p)
3. a) Rita funktionskurvan $y = x - e \ln(x)$ med angivande av extrempunkter och konvexitet/konkavitet. (4p)
b) Visa att $e^x > x^e$ för alla $x \in]0, \infty[\setminus \{e\}$
och beräkna arean av området $\{(x, y) : 0 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq e^x - x^e\}$. (4p)
c) Visa att funktionen $h(x) = x^2 + 2ex(1 - \ln x)$ är injektiv och beräkna $Dh^{-1}(e^{-2} + 4)$. ledn: lös först a) och utnyttja det för b) och c). (4p)
4. Låt $f(x) = \frac{1}{2 \sin x + \sin 2x}$.
a) Rita funktionskurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter.
ledn: det räcker att studera funktionen i intervallet $]0, \pi[$, varför? (6p)
b) Bestäm den primitiva funktion till f i intervallet $]0, \pi[$ som går genom punkten $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})$. (6p)
5. Låt $f(0) = 0$ och $f(x) = \frac{1}{2}x + x^2 \sin \frac{1}{x}$ för $x \neq 0$. Visa att f är deriverbar med $f'(0) > 0$ men ej växande i någon omgivning till origo. (8p)
6. Givet är $D_F =]-1, 1[$, $F(0) = 0$ och $F'(x) = \operatorname{arctanh}(x)$.
a) Bestäm $F(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1+} F(x)$ och $\lim_{x \rightarrow 1-} F(x)$. (Rita!) (7p)
b) Visa att $\tan(x) < \operatorname{arctanh}(x) < \tan(\frac{\pi}{2}x)$ för $0 < x < 1$. [$\operatorname{arctanh}(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$] (7p)
7. Rita kurvan $y = f(x)$ med angivande av extrempunkter och asymptoter då $f(4) = f(0) = 0$, $f(-5) = \ln \frac{3}{2}$ och $f'(x) = \frac{x^2 - 8x - 2}{x^4 + x^3 + 2x - 4}$ för $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. (8p)
8. Visa att $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ är konvergent för $x > 0$ och att $\Gamma(n) = (n-1)!$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (8p)

SVAR:

1. 1

2. 35

3. a) $(e, 0)$ str. minimipunkt, y -axeln är asymptot, kurvan är str. konvex

b) arean är $\frac{e^e - e - 1}{e + 1}$

c) $\frac{e}{2(1+e^2)}$

4. a) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ är lokala extrempunkter (extremvärden $\pm \frac{2\sqrt{3}}{9}$)

b) $\frac{1}{4} \left(\ln \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + \frac{1}{1+\cos x} + 1 \right)$

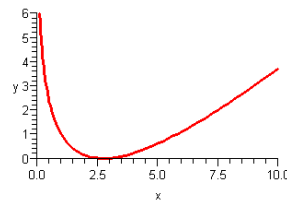
6. a) $(1+x) \ln \sqrt{1+x} + (1-x) \ln \sqrt{1-x} = x \operatorname{arctanh}(x) + \frac{1}{2} \ln(1-x^2)$,

$$\lim_{x \rightarrow -1+} F(x) = \ln 2 = \lim_{x \rightarrow 1-} F(x)$$

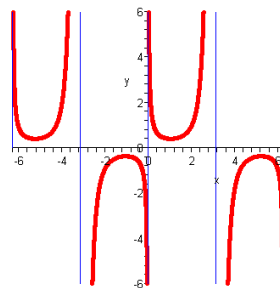
7. $f(x) = \ln \frac{x^2+2}{|x^2+x-2|}$, $x = 4 - 3\sqrt{2}$ och $x = 4 + 3\sqrt{2}$ är lok. minimipunkter,
 $x = -2$, $x = 1$ och x -axeln är asymptoter

Graferna:

uppg. 3: $y = x - e \ln(x)$



uppg. 4: $y = \frac{1}{2 \sin x + \sin 2x}$



uppg. 7: $y = \ln \frac{x^2+2}{|x^2+x-2|}$

