

# Övningstenta i inledande matematisk analys F1 (tma970), 08-09-20, lösningar

## uppg. 1

Visa med induktion att  $F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n$  för alla  $n \in \mathbb{N}$  där  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  och  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  för  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

I.  $n = 1$ :  $F_1 = 1 < \frac{5}{3}$  är ok;  $n = 2$ :  $F_2 = 1 < \left(\frac{5}{3}\right)^2$  är ok.

II. Förets.:  $F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n$  gäller för  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq n \leq m_0$  för något  $m_0 \geq 2$ .

Påst.:  $F_{m_0+1} < \left(\frac{5}{3}\right)^{m_0+1}$ .

Bevis:  $F_{m_0+1} = F_{m_0} + F_{m_0-1} < \left(\frac{5}{3}\right)^{m_0} + \left(\frac{5}{3}\right)^{m_0-1} =$   
 $= \left(\frac{5}{3}\right)^{m_0} + \frac{3}{5} \left(\frac{5}{3}\right)^{m_0} = \frac{8}{5} \left(\frac{5}{3}\right)^{m_0} < \left(\frac{5}{3}\right)^{m_0+1}$  ty  $\frac{8}{5} = \frac{24}{15} < \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$  vsv

III. Induktionsaxiomet ger då att  $F_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n$  gäller för alla  $n \in \mathbb{N}$ . vsv

## uppg. 2

a) Funktionen  $f(x) = \sqrt{x^8+1} + \sqrt{x^6+1} + \sqrt{x^2+1} - 3$  är kontinuerlig (sammansatt av kontinuerliga funktioner) och  $f(0) = 0 < 1 < f(1) = 3\sqrt{2} - 3$  (ty  $4 < 3\sqrt{2}$  ty  $16 < 9 \cdot 2$ ), satsen om mellanliggande värden ger att det finns minst ett  $x_0 \in [0, 1]$  så att  $f(x_0) = 1$ ; vidare är  $f$  strängt växande (summa av strängt växande funktioner) och därmed injektiv på  $[0, \infty[$ , antar alltså där värdet 1 högst en gång, dvs.  $f$  antar värdet 1 på  $[0, \infty[$  precis en gång; eftersom  $f$  är jämn ( $f(-x) = f(x)$ ), så antar  $f$  värdet 1 även i  $] -\infty, 0]$  precis en gång ( $f(-x_0) = 1$ ), svaret är således "precis 2 lösningar".

b)  $f$  är deriverbar (ty sammansatt av deriverbara funktioner) med

$$f'(x) = \frac{4x^7}{\sqrt{x^8+1}} + \frac{3x^5}{\sqrt{x^6+1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \text{ speciellt existerar för } x = 0$$

$$f'(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$

svar: a) 2 lösningar b) 0

## uppg. 3

a)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{1+|x|} = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{1+|x|} = \frac{|x+2|}{1+|x|}$  är kontinuerlig i varje punkt  $a \in \mathbb{R}$  ty  $f$  är sammansatt av kontinuerliga funktioner och nämnaren är  $\neq 0$ ; vidare är

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x-2}{1-x} & \text{då } x \leq -2 \\ \frac{x+2}{1-x} & \text{då } -2 \leq x \leq 0, \text{ det visar att } f \text{ är deriverbar i alla punkter} \\ \frac{x+2}{1+x} & \text{då } 0 \leq x \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$  (ty sammansatt av deriverbara funktioner);

återstår att undersöka om differenskvoten  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  har ett gränsvärde då  $x$  går mot  $a$  för  $a \in \{-2, 0\}$ :

$$\underline{a = -2}: f(-2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{\frac{-x-2}{1-x} - 0}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{-1}{1-x} = -\frac{1}{3},$$
$$\lim_{x \rightarrow -2+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{\frac{x+2}{1-x} - 0}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{3},$$

det visar att  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  saknar gränsvärde då  $x \rightarrow -2$ .

$$\underline{a=0}: f(0) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\frac{x+2}{1-x} - 2}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{3x}{x(1-x)} = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{x+2}{1+x} - 2}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-x}{x(1+x)} = -1,$$

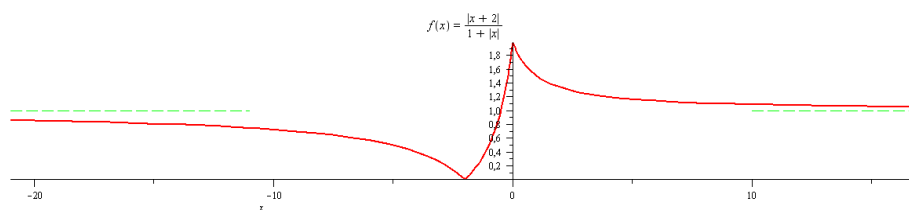
det visar att  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  saknar gränsvärde då  $x \rightarrow 0$ . Därmed har vi visat att  $f$  inte är deriverbar i  $-2$  och inte deriverbar i  $0$ .

- b)** För  $x \leq -2$  är  $f(x) = \frac{-x-2}{1-x} = 1 + \frac{3}{x-1}$  avtagande (ty  $x-1$  är växande);  
 för  $-2 \leq x \leq 0$  är  $f(x) = \frac{x+2}{1-x} = -1 + \frac{3}{1-x}$  växande (ty  $1-x$  är avtagande),  
 för  $0 \leq x$  är  $f(x) = \frac{x+2}{1+x} = 1 + \frac{1}{1+x}$  avtagande (ty  $1+x$  är växande).

**c)** Enligt **b)** är  $f$  avtagande på  $]-\infty, -2]$  och växande på  $[-2, 0]$ , alltså är  $-2$  en lokal minimipunkt. Eftersom  $f$  är växande på  $[-2, 0]$  och avtagande på  $[0, \infty[$  enligt **b)** så är  $0$  en lokal maximipunkt. Vidare ser vi att  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{1+|x|}\right) = 1$  ty  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{1 \pm x} = 0$  ( $c \in \{1, 3\}$ ),  $f$  har alltså inga andra extrempunkter,  $f(-2) = 0$  är  $f$ :s minsta värde och  $f(0) = 2$  är  $f$ :s största värde. Att  $0$  är  $f$ :s minsta värde inses även direkt:  $f(x) \geq 0 = f(-2)$ . Eftersom  $f$  är kontinuerlig så ger satsen om mellanliggande värden att värdemängden till  $f$  är  $V_f = [0, 2]$ , men det var ej frågat.

|              |                                                                                                        |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>svar:</b> | <b>a)</b> $f$ är kontinuerlig; $f$ är deriverbar i alla punkter $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$ |
|              | <b>b)</b> $f$ är växande på $[-2, 0]$ , avtagande på $]-\infty, -2]$ och på $[0, \infty[$              |

Grafen till  $y = \frac{|x+2|}{1+|x|}$ :



#### upp. 4

- a)**  $[0, 2] \times ]1, 3[ = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 1 < y < 3\}$  och  
 $]1, 3[ \times [0, 2] = \{(x, y) : 1 < x < 3, 0 \leq y \leq 2\}$  (rektanglar i planet, rita!).