

**Övningsskrivning i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2006-09-23**  
**kl. 8.30-10.30 i V**

**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa

**Telefon:** Bernhard Behrens, tel. 0768-681630

**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.  
 Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

=====

1. Låt  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ; visa att för alla  $N \in \mathbb{N}$  gäller  $\sum_{k=0}^N kx^k = \frac{Nx^{N+2} - (N+1)x^{N+1} + x}{(1-x)^2}$ . (6p)

2. Betrakta funktionen  $f(x) = \frac{\sqrt{|x^4 - 1|}}{x^2 + 1}$  med  $D_f = \mathbb{R}$ .

a) Är  $f$  deriverbar? (3p)

b) Funktionen  $g$  definieras genom  $D_g = [1, \infty[$  och  $g(x) = f(x)$  för  $x \in D_g$ .

Visa (utan att använda derivata) att  $g$  är injektiv och bestäm  $g^{-1}$ . (7p)

c) Bestäm värdemängden  $V_f$ . (5p)

3. Låt  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ .

Definiera följande begrepp (vissa är nonsens, motivera varför):

a)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . (2p)

b)  $f$  är kontinuerlig i  $a$ . (1p)

c)  $f$  är deriverbar i  $a$ . (2p)

d)  $f$  är injektiv i  $a$ . (1p)

e)  $f$  är kontinuerlig på  $[a, b]$ . (1p)

f)  $f$  är deriverbar på  $[a, b]$ . (1p)

g)  $f$  är injektiv på  $[a, b]$ . (1p)

(9p)

7p – 13p: 1 bonuspoäng, 14p – 20p: 2 bonuspoäng, 21p – 27p: 3 bonuspoäng, 28p – 30p: 4 bonuspoäng

BB

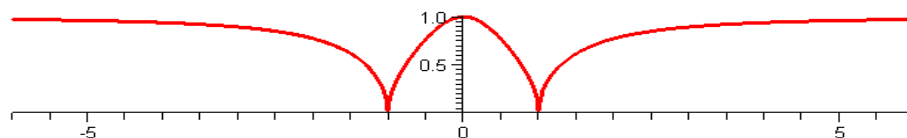
svar på baksidan

**SVAR** (06-09-23):

uppg. 2

q  
svar: a) inte i  $\pm 1$     b)  $g^{-1}(y) = \frac{1+y^2}{1-y^2}, 0 \leq y < 1$     c)  $V_f = [0, 1]$

Grafen till  $y = \frac{\sqrt{|x^4-1|}}{x^2+1}$ :



uppg. 3

Nonsens är

d): vi har definierat "injektiv" på ett intervall (det krävs ju minst 2 punkter!)

f): "deriverbar i  $[a, b]$ " innebär ju "deriverbar i varje punkt  $x_0 \in [a, b]$ ", och då måste  $x_0$  vara inre punkt i  $[a, b]$ , men  $a$  och  $b$  är inte inre punkter!

**Övningsskrivning i inledande matematisk analys F1 (TMA970), 2005-09-17**  
**kl. 8.30-10.30 i V**

**Hjälpmedel:** Inga, ej heller räknedosa

**Telefon:** Bernhard Behrens, tel. 0768-681630

**OBS:** Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.  
 Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

=====

1. Betrakta påståendet  $P(n): \sum_{k=3}^n \ln\left(\frac{k(k+1)}{(k-1)(k-2)}\right) = \ln(n^4 - n^2)$ .

a) Visa att om  $P(n_0)$  är sant för något  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $n_0 \geq 3$ , så är även  $P(n_0 + 1)$  sant. (3p)

b) Är  $P(n)$  sant för alla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ ? (t.ex.: gäller  $P(2005)$ ?).

Om inte, hitta den korrekta formeln för  $\sum_{k=3}^n \ln\left(\frac{k(k+1)}{(k-1)(k-2)}\right) = ?$  och visa att den gäller

för alla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$  (och därmed att  $P(2005)$  är falskt). (3p)

2. Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definieras genom

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{|x|}-1} \quad \text{för } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \quad \text{och} \quad f(-1) = A, \quad f(1) = B.$$

Kan  $A$  resp.  $B$  väljas så att  $f$  blir kontinuerlig i  $-1$  resp. i  $1$ ? (4p)

3. Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definieras genom  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x-2}}$ .

a) Motivera (utan att använda derivata) varför  $f$  är injektiv och bestäm  $f^{-1}$  (glöm ej att ange  $D_f$  och  $D_{f^{-1}}$ ). (7p)

b) Beräkna  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \sqrt{x-2})$ . (4p)

4. a) Låt  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ .

Visa att om  $f$  är strängt monoton på  $[a, b]$  så är  $f$  injektiv på  $[a, b]$ . (2p)

b) Visa att  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ . (4p)

c) Visa att  $\sqrt{3}$  inte är ett rationellt tal. (3p)

7p – 13p: 1 bonuspoäng, 14p – 20p: 2 bonuspoäng, 21p – 27p: 3 bonuspoäng, 28p – 30p: 4 bonuspoäng

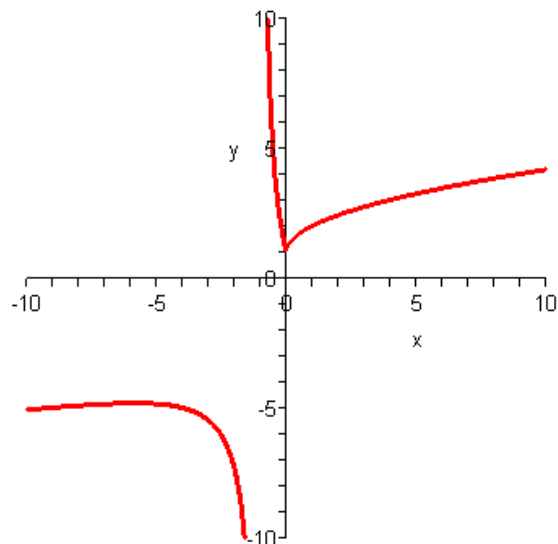
BB

svar på baksidan

**SVAR** (05-09-17)

1. Den korrekta formeln är  $\sum_{k=3}^n \ln\left(\frac{k(k+1)}{(k-1)(k-2)}\right) = \ln(n^4 - n^2) - \ln 12$

2. Nej (med  $B=2$  blir  $f$  kontinuerlig i 1, men  $A$  kan ej väljas så att  $f$  blir kontinuerlig i  $-1$ )



3. a)  $D_f = [1, \infty[$ ,  $V_f = D_{f^{-1}} = [0, \infty[$ ,  $f^{-1}(y) = \frac{5}{2} + y^2 - \sqrt{\frac{9}{4} + y^2}$  ( $y \geq 0$ )

b)  $\frac{1}{2}$

