INSTUDERINGSUPPGIFT 3 (tillämpning av derivata) (lösn)

A) Visa att $f(x)=\sqrt{1-x}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}\right)$ (instuderingsuppgift 2)
är injektiv på $]-\infty,0[$ och injektiv på $]0,\frac{1}{2}]$ och ange V_f.

B) Låt $f(x)=\sqrt{x}\ln\sqrt[3]{x}+\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}+\dfrac{7\sqrt{x}}{3}$ för $x>0$ och $f(0)=0$.

a) Visa att f är kontinuerlig på $[0,\infty[$.

b) Visa att f är injektiv på $[1,\infty[$.

c) Är f injektiv på $]0,1[$?

C) Låt $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & \text{då } x\neq 0 \\ 0, & \text{då } x=0 \end{cases}$.

a) Är f kontinuerlig? Är f deriverbar? Är f' kontinuerlig?

b) Visa att f är injektiv på $[\frac{2}{\pi},\infty[$.

c) Visa att f är strängt konvex på $[\frac{2}{\pi},\infty[$.

d) Låt $g(x)=f(x)$ för $x\in D_g=[\frac{2}{\pi},\infty[$. Beräkna $D(g^{-1})(\frac{9}{2\pi^2})$.

Extrauppgifter

5) Visa att $\dfrac{a}{b}<\dfrac{\sin a}{\sin b}$ för $0<a<b<\pi$.

6) Visa att för positiva x gäller: $2^x<x^2 \Leftrightarrow 2<x<4$ (det ger t.ex. $2^e<e^2$).

7) Låt $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$, $D_f=]0,\frac{\pi}{2}[$.
Visa att f är injektiv, bestäm värdemängden V_f och $D(f^{-1})(\frac{3}{2\pi})$.

svar: $]0,\frac{2}{\pi}[$, $\frac{2\sqrt{3}\pi^2}{9(\pi-\sqrt{3})}$

8) Låt $f(x)=\arctan(\frac{1}{x})$ då $x\neq 0$ och $f(0)=0$.
Är f kontinuerlig? Deriverbar? Har f' ett gränsvärde då x går mot 0?
Rita kurvan $y=f(x)$ med angivande av asymptoter och konvexitet/konkavitet.

svar: f är udda, ej kontinuerlig i 0, konvex i $]0,\infty[$, $y=0$ är asymptot, $f'(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-1$.

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 2

a) $D_f = \{x : x \neq 0 \wedge x \leq 1 \wedge 2x \leq 1\} = \left]-\infty,0\right[\cup \left]0,\frac{1}{2}\right]$. Eftersom f är sammansatt av kontinuerliga funktioner så är f kontinuerlig (dvs. kontinuerlig i varje $x \in D_f$!).

b) För att lättare kunna beräkna gränsvärdena skriver vi om f (ändamålsenligt):

$$f(x) = \sqrt{1-x}\left(\sqrt{\tfrac{1}{x^2}-\tfrac{1}{x}} - \sqrt{\tfrac{1}{x^2}-\tfrac{2}{x}}\right) = \frac{\sqrt{1-x}\left(-\frac{1}{x}+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}}} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x}}, & \text{då } x>0 \\ \dfrac{\sqrt{1-x}}{-\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x}\right)}, & \text{då } x<0 \end{cases}.$$

$\left[\text{obs}: \sqrt{x^2} = -x \text{ då } x<0!\right]$ Det ger att $\lim_{x\to 0-} f(x) = -\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{1}{2}$, f saknar alltså gränsvärde då x går mot 0. Vidare är för $x<0$ $f(x) = \dfrac{-1}{1+\sqrt{\frac{1-2x}{1-x}}} = \dfrac{-1}{1+\sqrt{2-\frac{1}{1-x}}}$, det ger att

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{-1}{1+\sqrt{2}} = 1-\sqrt{2}$ (linjen $y = 1-\sqrt{2}$ är alltså asymptot då $x \to -\infty$).

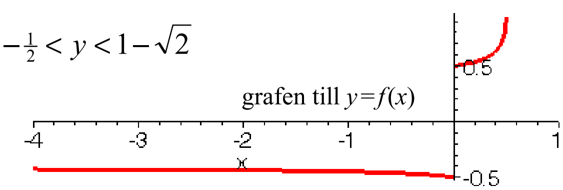
c) Vi har $g(x) = \dfrac{-1}{1+\sqrt{2+\frac{1}{x-1}}}$; på $\left]-\infty,0\right]$ är $\frac{1}{x-1}$ str. avtagande, alltså är $2+\frac{1}{x-1}$ och därmed $1+\sqrt{2+\frac{1}{x-1}}$ str. avtagande, detta visar att g är str. avtagande och därmed injektiv. Vidare är $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1-\sqrt{2}$, $\lim_{x\to 0-} g(x) = -\frac{1}{2}$, g är kontinuerlig, s.o.m.v. ger då att $\underline{V_g = \left]-\frac{1}{2}, 1-\sqrt{2}\right[}$ [obs: $1-\sqrt{2} > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 9 > 8$]. Beräkning av g^{-1}: för $y \in V_g$ gäller

$$y = g(x) \Leftrightarrow \tfrac{-1}{y} = 1+\sqrt{2+\tfrac{1}{x-1}} \Leftrightarrow -\tfrac{1+y}{y} = \sqrt{2+\tfrac{1}{x-1}} \underset{\text{ty } y\in V_g}{\Leftrightarrow} \tfrac{1+y^2+2y}{y^2} = 2+\tfrac{1}{x-1} \Leftrightarrow \tfrac{1}{x-1} = \tfrac{1+2y-y^2}{y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1 = \tfrac{y^2}{1+2y-y^2} \Leftrightarrow x = \underline{\tfrac{1+2y}{1+2y-y^2} = g^{-1}(y)}.$$ ANM: vi kan nu ange V_g även så här:

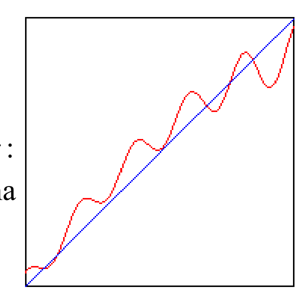
$$x<0 \Leftrightarrow \tfrac{1+2y}{1+2y-y^2} < 0 \Leftrightarrow \tfrac{-2\left(y+\frac{1}{2}\right)}{(y-1)^2-2} < 0 \Leftrightarrow \tfrac{2\left(y+\frac{1}{2}\right)}{\left(y-1-\sqrt{2}\right)\left(y-1+\sqrt{2}\right)} > 0 \Leftrightarrow -\tfrac{1}{2} < y < 1-\sqrt{2}$$

(gör teckentabell!).



Lösningsförslag till extrauppgift 3

Åskådligt är det klart: eftersom f är kontinuerlig och $0 \leq f(x) \leq 1$ så borde väl kurvan $y = f(x)$ någonstans korsa linjen $y = x$. Ett strängt bevis för det får vi t.ex. så här: om $f(0)=0$ eller $f(1)=1$ så är vi färdiga (0 eller 1 är då fixpunkt); om $f(0) \neq 0$ och $f(1) \neq 1$ så gäller för funktionen $g(x) = f(x) - x$: g är kontinuerlig på $[0,1]$, $g(0) > 0$ och $g(1) < 0$, värdet 0 ligger mellan värdena $g(0)$ och $g(1)$, enligt satsen om mellanliggande värden finns det då ett $x_0 \in [0,1]$ (i själva verket $x_0 \in \left]0,1\right[$) där g antar värdet 0, dvs. $f(x_0) = x_0$.



vsv