Föreläsningsanteckningar och övningar till logik – mängdlära

Dessa föreläsningsanteckningar kompletterar mycket kortfattat kap. 0 och appendix B i *Persson/Böiers* (Analys i en variabel) som gås igenom lv 1.

1. SATSLOGIK

Vi skall försöka att skapa ett entydigt (vetenskapligt) språk med hjälp av vardagssvenskan genom att införa strängt definierade termer (s.k. facktermer, grundbegrepp) och "operatorer" för att generera nya termer.

1.1 UTSAGOR

DEF En MATEMATISK UTSAGA är en utsaga som är antingen sann eller falsk ("tertium non datur") och vars sanningshalt kan avgöras på ett objektivt sätt.

["DEFINITION" är ett fastslående vad ett visst begrepp skall betyda].

EX1 Betrakta följande uttryck:

$$\begin{cases} A:\ 1+2=3 \\ B:\ 1+2=5 \\ C:\ 2<3 \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} D:\ \text{det regnar} \\ E:\ 2006 \text{ är ett stort tal} \\ F:\ \text{skål} \end{cases}.$$

F är ingen utsaga; A t.o.m. E är utsagor, men D och E är inte matematiska utsagor (sanningshalten kan ej avgöras objektivt); A, B, C är matematiska utsagor: A och C är sanna, B är falsk; vi accepterar här redan begrepp som $1, 2, 3, 5, +, <, =$ mm..

EX2 För varje reellt tal x är $A(x): 2x=5$ en matematisk utsaga, ty för varje reellt tal x kan det avgöras om $A(x)$ är sann eller falsk, t. ex. är $A(2)$ falsk, $A(\frac{5}{2})$ sann.
$A(x)$ kallas "öppen utsaga" ty den innehåller en fri variabel x, som måste deklareras ("x reellt tal").

1.2 LOGISKA OPERATORER

Med hjälp av logiska operatorer kan vi bilda nya matematiska utsagor:

symbol	läs	namn
$\wedge$	och (and)	konjunktion
$\vee$	eller (or)	disjunktion
$\neg$	icke (not)	negation
$\Rightarrow$	medför	implikation
$\Leftrightarrow$	ekvivalent	ekvivalens

dvs.: om P och Q är matematiska utsagor så skall även $P \wedge Q, P \vee Q, \neg P, P \Rightarrow Q$ och $P \Leftrightarrow Q$ vara matematiska utsagor.
Vi definierar dessa utsagor genom att ange sanningsvärdet för alla möjliga sanningsvärden på P och Q:

Vi skriver 0 för "falsk" resp. 1 för "sann":

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$	$\neg P$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Komplicerade utsagor kan ofta förenklas med hjälp av regler ("formler"), dvs. ersättas med ekvivalenta, enklare utsagor. Två utsagor är ekvivalenta om de har samma sanningstabell (dvs. samma sanningsvärde för alla möjliga sanningsvärden av alla ingående utsagor):

SATS För matematiska utsagor P, Q, R gäller:

1. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$.

2. $(\neg(\neg P)) \Leftrightarrow P$.

3. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg P) \vee Q)$.

4. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg Q) \Rightarrow (\neg P))$.

5. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$.

6. $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$.

7. $\begin{cases} \text{a)}\ (\neg(P \vee Q)) \Leftrightarrow ((\neg P) \wedge (\neg Q)) \\ \text{b)}\ (\neg(P \wedge Q)) \Leftrightarrow ((\neg P) \vee (\neg Q)) \end{cases}$ (de Morgan).

8. $\begin{cases} \text{a)}\ (P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)) \\ \text{b)}\ (P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) \end{cases}$ (distributivitet).

1.3 EXEMPEL PÅ BEVIS

A. INDIREKT BEVIS

Man visar att utsagan "$P \Rightarrow Q$" är sann (P, Q matematiska utsagor) genom att visa att den ekvivalenta utsagan "$\neg Q \Rightarrow \neg P$" är sann.

EX1 Visa att för ett naturligt tal m gäller:
Om m^2 är delbart med 3 så är även m delbart med 3.

B. MOTSÄGELSEBEVIS

Man visar att P är sann (P en matematisk utsaga) genom att visa att $\neg P$ är falsk ($\neg P \Rightarrow f$, f en falsk utsaga).

EX2 Visa att $\sqrt{3}$ inte är ett rationellt tal (dvs. $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, se sid. 4).

EX3 Visa att det finns oändligt många primtal.

C. INDUKTIONSBEVIS

Man visar att $P(n)$ är sann (P en öppen matematisk utsaga) för alla $n \in \mathbb{N}$
(dvs. för alla naturliga tal n, se sid. 4), genom att visa att

I. $P(1)$ är sann.
II. Om $P(m)$ är sann för alla $m \leq p$, p ett godtyckligt fixt tal $(p, m \in \mathbb{N}$, se sid. 4$)$
så är även $P(p+1)$ sann.
III. Induktionsaxiomet (infört av *Peano* (1858-1932)) säger att då alla (oändligt många!) utsagor $P(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) är sanna.

Ett induktionsbevis består alltså av tre steg:
steg 1: "induktionsförankring": visa att $P(1)$ är sann (man kan börja med ett annat heltal än 1).
steg 2: "induktionssteget": visa $P(p) \Rightarrow P(p+1)$ för godtyckligt fixt $p \geq 1$.
steg 3: "induktionsprincipen": den ger att då $P(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{N}$.

2. MÄNGDALGEBRA

2.1 MÄNGDER

Den "naiva mängdläran" skapades av *Cantor*. Han definierade (1895):
"En MÄNGD M är en sammanfattning av bestämda objekt, verkliga eller tänkta, som kallas ELEMENT I M, till en enhet." Vi lägger till:
Det måste på ett objektivt sätt kunna avgöras om ett x är element i M eller inte.
Denna grundläggande "elementrelation" betecknas med $\in$:

DEF 1 Vi skriver $x \in M$ om x är element i M (x tillhör M, x ligger i M...)
resp. $x \notin M$ om x ej är element i M.

Vi betraktar här endast mängder som är definierade genom matematiska utsagor och därmed väldefinierade. För en öppen matematisk utsaga P sätter vi
$S_P = \{x : P(x) \text{ är sann}\} = \{x : P(x)\}$ = mängden av alla x sådana att $P(x)$ är sann.
S_P kallas "sanningsmängden till P", $\{$ och $\}$ kallas "mängdparenteser".

EX $M = \{x : x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3\}$.
Vi skriver kort $M = \{1,2,3\}$, dvs. vi skriver helt enkelt upp mängdens element mellan mängdparenteserna om det är möjligt.

DEF 2 Vi säger M är en ÄNDLIG mängd, om antalet element i M är ändligt, resp.
M är en OÄNDLIG mängd om antalet element i M ej är ändligt.

Viktiga mängder är (och kommer alltid att betecknas så):

DEF 3 $\emptyset = \{x : x \neq x\}$ .... den TOMMA mängden
$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\cdots\}$ .... de NATURLIGA TALEN (obs: vi tar **ej** med 0)
$\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots\}$ ... HELTALEN
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m,n \text{ heltal}, n \neq 0\}$ .. de RATIONELLA TALEN
$\mathbb{R}$ .... de REELLA TALEN

För $a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ inför vi INTERVALL-beteckningarna
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, $\quad]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,
$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, $\quad]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$,
$[a,\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$, $\quad]a,\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$,
$]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$, $\quad]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$.
Dessa mängder kallas slutet intervall resp. öppet intervall resp. halvöppet intervall.

OBS ∞ och $-\infty$ är ej element i $\mathbb{R}$ (ej reella tal)!
Låt $a \in \mathbb{R}$; det gäller $]-\infty,\infty[= \mathbb{R}$ och $[a,a] = \{a\}$, $]a,a[= \emptyset$;
$[a,\infty]$ är odefinierat!
.

2.2 MÄNGDOPERATORER

Vi översätter nu operatorerna $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ mellan utsagor till operatorer mellan mängder. I det följande skall alla x ligga i en grundmängd U ("universum"), t.ex. $U = \mathbb{R}$.

DEF 1 För mängder A, B definieras ($A = S_P, B = S_Q$, P, Q matematiska utsagor)

1. $\cup$ (union): $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ ($S_{P \vee Q} = S_P \cup S_Q$)

2. $\cap$ (snitt): $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ ($S_{P \wedge Q} = S_P \cap S_Q$)

3. $\subseteq$ (delmängd): $(A \subseteq B) \Leftrightarrow ((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$ ($P(x) \Rightarrow Q(x), x \in U$)

4. $=$ (likhet): $(A = B) \Leftrightarrow ((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))$ ($P(x) \Leftrightarrow Q(x), x \in U$)

5. ^{c} (komplement): $A^c = \{x : x \notin A\}$ ($S_{\neg P} = (S_P)^c$).

Vidare skriver vi $A \neq B$ för $\neg(A = B)$

och $A \underset{\neq}{\subseteq} B$ (äkta delmängd) för $(A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$.

EX 1: **a)** $\{1,2,3\} = \{2,3,1\} = \{1,2,2,1,3,3,1,2\}$ osv.

(det spelar ingen roll hur vi skriver upp elementen i en mängd).

b) $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

c) $(\,]-\infty, 0]\,)^c = \,]0, \infty[$ ($U = \mathbb{R}$).

d) $\emptyset \underset{\neq}{\subseteq} \mathbb{N} \underset{\neq}{\subseteq} \mathbb{Z} \underset{\neq}{\subseteq} \mathbb{Q} \underset{\neq}{\subseteq} \mathbb{R}$ (sista inklusionen: ex. 2 sid. 3).

Det underlättar mycket att åskådliggöra mängder som punktmängder i planet (*Venndiagram* efter den brittiske logikern *John Venn*, 1834-1923), se föreläsningen.

Vi definierar nu ytterligare några operatorer som vi kommer att ha nytta av:

DEF 2 För två mängder A, B definierar vi

a) MÄNGDDIFFERENSEN $\setminus$:
$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ (alla x som ligger i A men inte i B)

b) den SYMMETRISKA MÄNGDDIFFERENSEN Δ:
$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

För mängder gäller motsvarande regler som för utsagor:

SATS För mängder A, B, C gäller

1. $(A = B) \Leftrightarrow ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A))$.

2. $B^c = U \setminus B$, $A \setminus B = A \cap B^c$.

3. $A \Delta B = B \Delta A$.

4. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

5. $\begin{cases} \text{a) } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \\ \text{b) } (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \end{cases}$ (de Morgan).

6. $\begin{cases} \text{a) } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ \text{b) } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{cases}$ (distributivitet).

Regel 4 visar att den operator för utsagor som motsvarar Δ, är XOR (*exclusive or*):
$(P\ XOR\ Q) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (\neg(P \wedge Q))) \Leftrightarrow ((P \wedge (\neg Q)) \vee (Q \wedge (\neg P)))$, alltså
"antingen P eller Q men ej bägge" (P och Q två matematiska utsagor).

Till sist konstruerar vi två nya, viktiga mängder:

DEF 3 Låt M, N vara två mängder.

1. Mängden $P(M) = \{A : A \subseteq M\}$ = mängden av alla delmängder till M kallas POTENSMÄNGDEN AV M.

2. Mängden $M \times N = \{(m,n) : m \in M \wedge n \in N\}$ = mängden av alla "ordnade par" (m,n) med $m \in M$ och $n \in N$ kallas
CARTESISKA MÄNGDPRODUKTEN AV M och N.

EX 2 **a)** Alltid gäller $\emptyset \in P(M)$ och $M \in P(M)$ (M en mängd).

b) $I\!R \times I\!R = \{(x,y) : x \in I\!R \wedge y \in I\!R\}$ är "planet", betecknas $I\!R^2$.

c) $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$: $A \times B =$ rutorna på en schackbräda.

Då kan vi definiera "relation" och, som speciell relation, "funktion":

DEF 4 Låt M, N vara två mängder.

1. En delmängd $R \subseteq M \times N$ kallas RELATION FRÅN M TILL N,
$D_R = \{x \in M : \text{det finns } y \in N \text{ så att } (x,y) \in R\}$ kallas DEFINITIONSMÄNGD,
$V_R = \{y \in N : \text{det finns } x \in M \text{ så att } (x,y) \in R\}$ kallas VÄRDEMÄNGD till R;
vi skriver även xRy för $(x,y) \in R$ ("y står i relation R till x").
En relation $R \subseteq M \times M$ kallas (BINÄR) RELATION PÅ M.

2. En relation $f \subseteq M \times N$ kallas AVBILDNING (eller FUNKTION) FRÅN M TILL N om f är "höger- entydig", dvs. om för $x \in M, y_1 \in N, y_2 \in N$ gäller $((xfy_1) \wedge (xfy_2)) \Rightarrow (y_1 = y_2)$. I så fall finns det till varje x i f:s definitionsmängd precis ett y i f:s värdemängd som står i relation f till x, dvs. vi kan se f som en tillordning $f : x \mapsto y$ som ordnar till varje $x \in D_f$ ett entydigt bestämt $y \in V_f$;
för att framhäva detta skriver vi $y = f(x)$ ("y är en funktion av x") i stället för xfy och (vi använder något missbrukligt samma symbol f):

$$\boxed{\begin{array}{l} f : M \to N \\ \quad x \mapsto f(x) \end{array}}$$

läs: "f är en avbildning från M till N som ordnar till ett element $x \in D_f$ elementet $y = f(x) \in V_f$".

Observera att vi använder pilen $\to$ för avbildningen ("från M till N") och pilen $\mapsto$ för den elementvisa tillordningen ("f ordnar till x bildpunkten $f(x)$").
Själva relationen kallas GRAFEN TILL f och betecknas G_f:
$G_f = \{(x,y) \in M \times N : x \in D_f \wedge y = f(x)\}$. En avbildning $f : M \to M$ med $D_f = M$ kallas UNITÄR OPERATOR PÅ M och en avbildning $f : M \times M \to M$ med $D_f = M \times M$ kallas BINÄR OPERATOR PÅ M.

EX3 **a)** Ordningsrelationen $<$ ("mindre än") på $\mathbb{R}$ är halvplanet
$< \; = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y-x \text{ är positivt}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; kompelementet
$\geq \; = \mathbb{R}^2 \times R^2 \setminus <$ är relationen "större än eller lika med" (rita!).

b) Funktionen "kvadrera" skriver vi upp så här:
$f : \underset{x}{\mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{x^2}{\mathbb{R}}$; här är $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = [0, \infty[$, $G_f = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ (rita!).

c) Additionen $+$ är avbildningen $+ : \underset{(x,y)}{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{x+y}{\mathbb{R}}$ (en binär operator på $\mathbb{R}$).

Binära relationer spelar en viktig roll i t.ex. switchnätteorin. Vi nämner en speciell relation som gör det möjligt att dela upp en mängd i "klasser" av element som anses vara likvärdiga i en viss mening:

DEF5 En relation $\sim \; \subseteq M \times M$ på M kallas

a) REFLEXIV om $x \sim x$ för alla $x \in M$.

b) SYMMETRISK om $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ för alla $x \in M$, $y \in M$.

c) TRANSITIV om $((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \Rightarrow (x \sim z)$ för alla $x \in M, y \in M, z \in M$.

d) EKVIVALENSRELATION PÅ M om $\sim$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

EX4 **a)** $\Leftrightarrow$ är en ekvivalensrelation på mängden av alla matematiska utsagor.

b) $=$ är en ekvivalensrelation på $P(M)$ (M en mängd).

c) "Modulo-räkning" ger en ekvivalensrelation på $\mathbb{Z}$: låt $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$;
man säger "m är kongruent n modulo p", bet. $m \equiv n (\operatorname{mod} p)$,
om $m - n = kp$ för något $k \in \mathbb{Z}$. "kongruent modulo p" är en ekvivalensrelation på $\mathbb{Z}$, tal som ger samma rest vid division med p är ekvivalenta. Ett exempel är klockan: vi räknar modulo 12.

Satslogik och mängdlära är två viktiga, självständiga matematiska discipliner. Men de "funkar" på samma sätt som (är specialfall av, exempel på, modeller för) en mera generell matematisk struktur (= mängd av vissa objekt med operationer som lyder vissa regler), nämligen en "Boolesk algebra". Man skriver operationerna då "algebraiskt" $(+, \cdot)$.

George Boole (1815-11-02 – 1864-12-08): The Mathematical Analysis of Logic (1847)
An Investigation of the Laws of Thought (1854)

ÖVNINGAR

1. a) Visa $(\neg((x<y)\vee(y<x)))\Leftrightarrow(x=y)\quad(x\in I\!R,\ y\in I\!R)$.

b) Bestäm sanningsmängderna S_P, S_Q och S_R till
$P(x)$: $(x^2>x)\vee(\neg(x>1))$, $R(x)$: $(x^2>x)\wedge(\neg(x>1))$ och
$Q(x)$: $(\neg(x=2))\vee(3x-x^2=2)\quad(x\in I\!R)$.

c) Visa att för matematiska utsagor P, Q gäller:
$(P\vee Q)\Leftrightarrow(((P\Rightarrow Q)\Rightarrow Q)\wedge((Q\Rightarrow P)\Rightarrow P))$ (*Dummett*'s identitet).

2. a) Bestäm $A\cup B,\ A\cap B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$ och $A\Delta B$ för $A=\{1,2,3,4\},\ B=\{3,4,5\}$.

b) Bestäm $A\cup B,\ A\cap B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$ och $A\Delta B$ för $A=[-8,9],\ B=\,]-5,\infty[$.

c) Bestäm $P(M)$ för $M=\{1,2,3\}$.

d) Bestäm $A\times B$ och $B\times A$ för $A=\{1,2\},\ B=\{2,3,4\}$.

e) Bestäm $A\times B$ och $B\times A$ för $A=[0,1],\ B=[-1,\infty[$ (rita!).

f) Förenkla följande uttryck för mängder A, B:
f1) $A\setminus(B\setminus A)$, **f2)** $A\setminus(A\setminus B)$, **f3)** $A\cup(A\setminus B)$, **f4)** $A\cap(A\setminus B)$,
f5) $A\cup(B\setminus A)$, **f6)** $A\cap(B\setminus A)$, **f7)** $(A\setminus B)\cup(A\cap B)\cup(B\setminus A)$, **f8)** $\left(A^c\cap B^c\right)^c$.

g) Visa att det inte finns någon bijektiv avbildning $f:M\to P(M)$, M en mängd.

SVAR

1b) $S_P=S_Q=I\!R,\ S_R=\,]-\infty,0[$

2a) $\{1,2,3,4,5\}, \{3,4\}, \{1,2\}, \{5\}, \{1,2,5\}$

b) $[-8,\infty[,\ \ ]-5,9],\ \ [-8,-5],\ \ ]9,\infty[,\ \ [-8,-5]\cup\,]9,\infty[$

c) $\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

d) $A\times B=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}\neq B\times A=\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$

e) $A\times B=\{(x,y):0\le x\le 1,\ y\ge -1\}\neq B\times A=\{(x,y):x\ge -1,\ 0\le y\le 1\}$

f) **f1)** A, **f2)** $A\cap B$, **f3)** A, **f4)** $A\setminus B$, **f5)** $A\cup B$, **f6)** $\emptyset$, **f7)** $A\cup B$, **f8)** $A\cup B$