Fibonaccis talföljd och det gyllene snittet

DEFINITION

a) Talföljden $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ som ges av $F_0 = 0, F_1 = 1$ och $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ kallas FIBONACCI-FÖLJD, talen F_n kallas FIBONACCI-TAL (varje tal är summan av de två föregående talen).

b) $\varPhi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ resp. $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (Phidias-tal; förhållandet, resp. det reciproka förhållandet, i det gyllene snittet; eng.: golden ratio eller golden section).

Fibonacci-talen F_n och talet φ har oräkneligt många intressanta egenskaper och tillämpningar, börja bara bläddra på nätet, t.ex. http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibn.html
eller http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number
eller http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html.
Några av dessa kan du visa som utmärkta exempel på induktion och gränsvärde mm:

fib 1. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller att talet n kan skrivas på F_{n+1} olika sätt som summa av ettor och tvåor (summationsordningen spelar roll, t. ex. fås $3 = 1+1+1 = 1+2 = 2+1$ på tre olika sätt).

fib 2. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varPhi^n - (1-\varPhi)^n\right)$ (*Binet*'s formel).

fib 3. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller F_n och F_{n+1} saknar gemensamma faktorer skilda från 1.

fib 4. Visa att för alla $3 \le n \in \mathbb{N}$ gäller $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} < F_n < 2^n$.

fib 5. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$.

fib 6. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.

fib 7. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k F_k = (-1)^n F_{n-1} - 1$.

fib 8. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.

fib 9. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}$.

fib 10. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$.

fib 11. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $\sum_{k=1}^{n} kF_k = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$.

fib 12. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n-1}F_{n+2}$.

fib 13. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $F_{2n+1}^2 - F_{2n}^2 = F_{2n}F_{2n+1} + 1$.

fib 14. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$.

fib 15. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $F_{2n} = F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1}$.

fib 16. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $F_nF_{m-1} + F_{n+1}F_m = F_{n+m}$, $m \in \mathbb{N}$.

fib 17. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

fib 18. Visa att $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$.

Anmärkning: Du kann visa fib 1-fib 16 med induktion, fib 12 fås dock direkt; fib 14 och fib 15 är ekvivalenta och följer ur fib 16; fib 16 resp. fib 17 visas lättast med fib 5 (utnyttja $\boldsymbol{A}^{n+m} = \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{A}^m$ för en kvadratisk matris $\boldsymbol{A}$ resp. beräkna determinanten). fib 18 visas med fib 2 eller genom att visa att följden $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ är begränsad nedåt och uppåt (<2) och att delföljderna a_{2m} resp. a_{2m+1} är avtagande resp. växande, alltså konvergenta, gränsvärdena fås genom att dela ekvationen $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ med F_n (jämna resp. udda *n*) och låta *n* gå mot ∞, då fås att dessa gränsvärden är lika och $= \Phi$ (se gs 2 nedan, eller visa $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{F_{n+1}} = 0$).

Några egenskaper av Φ, φ:

gs 1. **a)** $\varphi = \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$; $\Phi = \varphi + 1 = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\Phi} + 1$; **b)** $\Phi = 2\cos\frac{\pi}{5}$; $\varphi = 2\cos\frac{2\pi}{5}$.

gs 2. För alla heltal n gäller: $\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Phi^{n-1}$; $\varphi^{n+1} + \varphi^n = \varphi^{n-1}$; $\varphi^{2n} + \varphi^{-2n} \in \mathbb{N}$.
Speciellt: $\Phi^2 - \Phi = \varphi^2 + \varphi = \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\varphi^2} - \frac{1}{\varphi} = 1$.

gs 3. $1 - \varphi = \varphi^2$; $1 + \varphi = \frac{1}{\varphi}$; $1 + \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2}$; $\frac{1}{\varphi^3} = \frac{1+\varphi}{1-\varphi} = \left(\frac{\varphi}{1-\varphi}\right)^3 = (1+\varphi)^3 = 4 + \varphi^3$.

gs 4. $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k = \frac{1}{\varphi^2}$; $\sum_{k=0}^{\infty} k\varphi^k = \frac{1}{\varphi^3}$; $\sum_{k=0}^{\infty} k^2\varphi^k = \frac{1}{\varphi^6}$.

Anmärkning: $\Phi, -\varphi$ är rötterna till $x^2 - x - 1 = 0$ (gyllene snittet ges av $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$), det fås även direkt med fib 17: dela $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ med F_n och låt *n* gå mot ∞. P.g.a. sambandet $\varphi\Phi = 1$ formuleras gs 3 och gs 4 endast för φ. gs 1b: betrakta en triangel med vinklarna $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}$; *Binet*'s formel fib 2 kan alltså skrivas: $F_n = \frac{2^n}{\sqrt{5}}\left(\cos^n\frac{\pi}{5} - \cos^n\frac{3\pi}{5}\right)$. gs 4: använd att för $|x| < 1$ gäller

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} x^k \underset{[\text{ind.1}]}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ och derivera termvis (att det ger korrekt resultat visas i lp 2).